

В.С.Шипачев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

**Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений**



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1998

УДК 51
ББК 22.11
Ш63

Рецензент: д-р пед. наук, проф. А. Г. Мордкович

Шипачев В. С.

**Ш 63 Высшая математика. Учеб. для вузов. — 4-е изд.
стер. — М.: Высш. школа. 1998. — 479 с.: ил.
ISBN 5-06-003584-0**

В учебнике излагаются элементы теории множеств и вещественных чисел, числовые последовательности и теория пределов, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, элементы высшей алгебры, теория рядов и обыкновенные дифференциальные уравнения. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров.

Для студентов высших учебных заведений.

ISBN 5-06-003584-0

© Издательство «Высшая школа», 1998

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник написан автором на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по высшей математике на нематематических факультетах в Московском государственном университете и отвечает всем необходимым требованиям, предъявляемым к современному математическому образованию.

В учебнике излагаются основы высшей математики, поэтому он может быть использован как в университетах, так и в высших технических учебных заведениях, а также в гимназиях, лицеях и колледжах, где различные разделы высшей математики объединены в один курс.

Автор стремился изложить материал по возможности полно, строго и доступно, преследуя цель не просто сообщить те или иные сведения по высшей математике, а вызвать у студентов интерес к математике, расширить их кругозор и способствовать привитию математической культуры.

В основу написания книги положен дидактический принцип — от простого к сложному. Так, например, понятие предела сначала изучается для числовых последовательностей, затем для функций одной переменной, далее вводится понятие предела интегральных сумм и, наконец, рассматривается понятие предела для функций нескольких переменных.

Вещественные числа вводятся с помощью аксиоматического метода, который дает возможность наиболее компактно изложить необходимые сведения о числах и проще перейти к непосредственному изложению основного материала.

Основу учебника составляет математический анализ, включающий дифференциальное и интегральное исчисления, где изучается важнейшее понятие высшей математики — понятие функции. Оно рассматривается уже в курсе элементарной математики. Однако полное и систематическое изучение этого понятия проводится именно в высшей математике. В учебнике понятие функции определяется через понятие множества, что отвечает современному уровню преподавания математики.

Опыт показал, что для многих начинающих значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в учебнике главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры, надо сначала изучить нужный раздел и добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий и теорем.

Преподавателям хорошо известно, какие трудности возникают у студентов при изучении теории пределов. Понятие предела очень

глубокое и одно из важнейших в математике понятий. Вот почему следует обратить особое внимание на формулировки с « ϵ — N »- и « ϵ — δ »- терминологией. Важно ясное и четкое понимание сути определений, роли и места каждого слова. Для этого следует детально разобрать предлагаемые примеры и задачи.

При написании учебника автор учитывал, что в настоящее время в средних школах изучаются начала высшей математики. В учебнике изложен в основном теоретический материал, поэтому для практических занятий следует использовать задачник автора «Задачи по высшей математике», который составлен в полном соответствии с учебником и образует с ним единый учебно-методический комплекс. Материал учебника соответствует программе общего курса высшей математики объемом до 300 учебных часов. На тех факультетах, где изучается высшая математика с меньшим количеством часов, часть материала может быть опущена без нарушения целостности содержания курса.

Автор выражает глубокую благодарность академику А. Н. Тихонову, профессорам А. Г. Свешникову, Д. П. Костомарову, Н. М. Матвееву, А. А. Шестакову за активное участие в работе над учебником.

Автор также искренне признателен чл.-кор. Азербайджанской АН проф. А. А. Бабаеву, проф. Г. И. Чандирову и всем преподавателям кафедры математики физического факультета Азербайджанского государственного университета, принявшим участие в обсуждении рукописи учебника и сделавшим полезные замечания.

В заключение автор хотел бы отметить, что основой любого сильного государства является мощная экономика, обеспечивающая благосостояние своего народа, но она немыслима без точных наук, краеугольным камнем которых является математика. Автор желает новому поколению россиян, чтобы его книга помогла им в освоении математики на благо возрождения и процветания России. Успеха Вам в этом благородном деле!

Автор

Ни одно человеческое исследование
не может называться истинной
наукой, если оно не прошло через
математические доказательства.

*Леонардо да Винчи**

ВВЕДЕНИЕ

Математика — самая древняя и в то же время самая юная из наук. Она стала складываться во втором тысячелетии до нашей эры, когда потребности торговли, землемерия и мореплавания заставили упорядочить приемы счета и измерения, начало которых уходит в еще более глубокую древность. Уже строители египетских пирамид владели математическими знаниями.

В Древней Греции начиная с VI в. до н. э. математика приобретает статус самостоятельной науки. Окончательно как наука математика оформилась в III в. Евклидом в его бессмертных «Началах». По этой книге или по ее более доступным изложениям изучали геометрию более двух тысяч лет. Отсюда видно, что математика значительно отличается от всех других наук. Теоретические представления Аристотеля в области физики сейчас кажутся несколько наивными, они стали достоянием истории науки, хотя они обобщили все имевшиеся к тому времени знания об окружающем мире. Теорема же Пифагора и поныне составляет одну из основ геометрии.

Сложившись, математика не перестает развиваться, разрабатываются новые методы, открываются новые области, совершенствуются символика и научный аппарат. Возникновение физики Нового времени было связано с непосредственным применением математики Кеплером и Галилеем для изучения небесных и земных явлений. Великий поворотный пункт в истории математики наступил в XVII в., когда Декарт создал аналитическую геометрию, а Ньютон и Лейбниц — дифференциальное и интегральное исчисление. Эти открытия в огромной степени создали возможность как для собственного развития математики, так и для развития других наук, таких, как физика и астрономия.

Бурное развитие математики, последовавшее за этими открытиями, привело на рубеже XIX—XX столетий к новой научной революции, связанной, в частности, с признанием правомерности неевклидовых геометрий (Лобачевского, Римана, Бойяи) и созданием Кантором теории множеств. До сих пор математика продолжает развиваться, поражая воображение многообразием специальных областей, новизной и необычностью используемых представлений и понятий, неожиданным своеобразием методов, особенностями языка. Процесс дифференциации наук охватил и математику, приведя к возникновению внутри нее множества отраслей.

* Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. М., 1955.

Одновременно с развитием методов и отраслей математики происходило и ее внедрение в другие науки, шел процесс так называемой математизации науки. В силу логики развития самой науки математика превратилась в метод научного исследования. Если в период классической физики математика служила преимущественно для обработки экспериментальных данных, установления точного количественного отношения между физическими явлениями и процессами, то уже к концу XIX в. математические вычисления стали предварять физические гипотезы и открытия. Благодаря использованию математических методов уже не только обрабатывались показания приборов и результаты экспериментов, но стали создаваться такие математические модели, реальный физический смысл которых еще был не известен и его еще предстояло выяснить.

Именно этот факт нередко получал неправильное истолкование как самих ученых, так и идеалистических философов и был зафиксирован в известном афоризме «материя исчезла, остались одни уравнения»

Суть этого явления состоит в том, что, используя математические методы, можно проникать в еще не исследованные области физического мира, пока не доступные для исследования физическими методами, открывать в них математические закономерности, создавать математические модели неизвестных физических процессов и, тем самым, направлять мысль экспериментатора. В наше время физик-теоретик — это прежде всего математик. «Математика для физика, — говорит крупный американский ученый Ф. Дж. Дайсон, — это не только инструмент, с помощью которого он может количественно описать любое явление, но и главный источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории»*.

Наглядным примером роли математического мышления для физических открытий может служить общая теория относительности А. Эйнштейна, которая была завершена до экспериментальной проверки, результаты которой практически совпали с предсказанными теорией.

Не менее убедительный пример — история возникновения квантовой механики, которая была первоначально построена чисто математическим путем, на основе некоторых известных, но не объясненных в то время физических данных, в результате гениального, но чисто «умозрительного скачка математического воображения» (Ф. Дж. Дайсон). Она не только была подтверждена соответствующими экспериментами, но явилась источником и стимулом дальнейшего развития физики микромира со всеми ее впечатляющими результатами, роль которых в XX в. хорошо известна.

У всех, кто изучал историю математики и ее применения в науках о природе и в технике и размышлял об отношении математики

* Дайсон Ф. Дж. Математика в физических науках. — В кн.: Математика в современном мире. М., 1967.

к объективному миру, будь это сами математики, физики или философы, неизбежно возникал вопрос о чудесной способности математики давать правильное описание или отображение физических процессов, поведения физической вселенной. Ученые, стоявшие у колыбели современной науки, такие, как Кеплер и Галилей, пораженные достигнутыми ими результатами, считали, что книга природы написана ее божественным творцом на языке математики, так что ученому остается только прочесть эти записи. С тех пор высказывалось множество предположений о природе математики и ее познавательной способности, но ни одно из них не получило всеобщего признания.

В XX в. одним из западных философов Витгенштейном была высказана поразительная мысль, что вся математика есть не что иное, как совокупность тавтологий, а математические доказательства представляют собой тавтологические преобразования. Эта теория объясняла абсолютную достоверность математики и ее универсальную применимость. Но она была бессильна объяснить способность математики открывать новое в мире, т. е. ту ее способность, которая является важнейшей для развития науки и позволяет все более широко применять математику в специальных науках.

Следует подчеркнуть, что математика оперирует не только абстракциями (как и все науки), но абстракциями весьма высокой степени. Даже любое из самых обычных натуральных чисел, например 4, есть абстракция, отвлекающаяся от всех специфических особенностей каких-либо четырех предметов (деревьев, ножек стола, углов дома и т. д.), характеризуя лишь класс, имеющий четыре члена. Понятие же натурального числа — это абстракция еще более высокая, поскольку оно представляет собой класс всех классов, имеющих не менее одного члена.

Сила математики именно в ее способности создавать все более высокие абстракции, оперировать ими и изучать их особенности и закономерности. Именно поэтому математические методы можно применять в различных науках помимо физики по мере того, как они сами становятся теоретическими, т. е. начинают создавать достаточно высокие абстракции и использовать их.

Немецкий философ XVIII в. Иммануил Кант сказал, что наука тем более заслуживает названия науки, чем больше в ней математики. В то время математика была неотъемлемым элементом лишь механики, физики и астрономии. В наше время настолько повысился теоретический уровень наук, а методы математики настолько разнообразились и усовершенствовались, что их слияние оказалось не только возможным, но и абсолютно необходимым как для развития этих наук, так и для самой математики.

Естественно, что процесс математизации не в одинаковой степени затронул все науки. Огромным успехом является применение математических методов в науках о неживой природе, а также в исследованиях в области биологии. Это оказалось возможным главным образом благодаря проникновению биологии во внутриклеточ-

ные процессы и анализу их на молекулярном уровне. В качестве примера можно привести исследования функционирования и построение моделей некоторых функций нейрона и изучение проблем наследственности и расшифровки генетического кода.

В общественных науках, которые были больше всего изолированы от математики, если не считать применения статистических методов в исследовании некоторых социальных процессов и явлений, можно также назвать различные области, такие, как проблемы демографии и проблемы структурной лингвистики, где применение математики дало хорошие результаты. Но, пожалуй, наиболее значительным научным достижением было внедрение математических методов в экономическую науку и в управление экономическими процессами. В наше время научное управление этими процессами в условиях плановой экономики может быть осуществлено только на основе применения точных математических методов во всех сферах народного хозяйства — от прогнозирования размещения полезных ископаемых до изучения спроса на товары широкого потребления и бытовые услуги, от изучения потребности в рабочей силе до планирования транспортных артерий, пассажирских перевозок и экспериментов по искусственному воздействию на атмосферные явления. Короче говоря, жизнь современного человека невозможна без математики.

О какой, однако, математике здесь идет речь: о так называемой «чистой» или прикладной? Но это традиционное разграничение в настоящее время становится все более и более условным и утрачивает свой первоначальный смысл. Даже наиболее абстрактные разделы «чистой» математики могут, оказывается, получить конкретное приложение в самых неожиданных областях науки и техники. В то же время необходимость решения специфических теоретических и практических проблем стимулирует разработку новых абстрактных методов и отраслей математической науки.

Последние десятилетия ознаменовались бурным развитием средств и методов вычислительной математики. Математическое моделирование позволяет рассчитать с помощью методов вычислительного эксперимента такие процессы, которые даже недоступны к постановке опыта (проблемы управляемого термоядерного синтеза, физики плазмы, лазеров и другие задачи). «Фактически за последние два десятилетия сложилось новое направление в теоретических физических исследованиях, — утверждает академик А. А. Самарский. — На основе математической модели с помощью ЭВМ проводится изучение устройств и физических процессов, «проигрывается» их поведение в различных условиях, находятся оптимальные параметры и режимы действующих или проектируемых конструкций. Сейчас можно проводить математическое прогнозирование сложных явлений и технических устройств, изучение которых другими способами затруднено»*. Открылись качественно совершенно новые возможности математики.

* Самарский А. А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. — Вестник АН СССР, 1979, № 5.

Эпоха научно-технической революции есть эпоха математизации науки, техники, экономики и управления. Этим определяется место математики в системе высшего образования. Современный научный работник или инженер должен не только знать основы математики, но и хорошо владеть всеми новейшими математическими методами исследования, которые могут применяться в области его деятельности. Сегодня никакая серьезная научная и инженерная работа невозможна без математики. Можно смело сказать, что изучение математики способствует формированию современного научного мышления, а ее широкое использование является условием дальнейшего прогресса на пути развития науки и техники.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ГЛАВА I

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Множества. Обозначения. Логические символы

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно принадлежит к так называемым первичным, неопределяемым понятиям. Слова «совокупность», «семейство», «система», «набор» и т. п. — синонимы слова «множество». Примерами множеств могут служить множество студентов данной аудитории; совокупность тех из них, кто сдал вступительные экзамены без троек; семейство звезд Большой Медведицы; система трех уравнений с тремя неизвестными; множество всех целых чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное или бесконечное число произвольных объектов.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами* или *точками*. Множества часто обозначают большими, а их элементы — малыми буквами. Если x — элемент множества X , то пишут $x \in X$ (x принадлежит X). Если x не является элементом множества X , то пишут $x \notin X$ (x не принадлежит X). Если $x_1, \dots, x_n$ — некоторые элементы, то запись $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, \dots, x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что они совпадают, и пишут $X = Y$. Если в X нет элементов, не принадлежащих Y , то говорят, что X содержится в Y или что X — подмножество множества Y . В этом случае пишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$ (Y содержит X). Если X не содержится в Y , то пишут $X \not\subset Y$. В математике часто используется пустое множество. Оно не содержит ни одного элемента и обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными множествами вещественных чисел*. Всюду, где это не может привести к неточности, для краткости вещественные числа будем называть просто числами.

* Вместо термина «вещественные числа» часто используют термин «действительные числа».

Пусть $P(x)$ — какое-то свойство числа x . Тогда запись $\{x \mid P(x)\}$ означает множество всех таких чисел, которые обладают свойством $P(x)$. Например, множество $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ есть совокупность корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, т. е. это множество состоит из двух элементов: 1 и 2; $\{x \mid 3 < x < 7\}$ — множество всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $3 < x < 7$; $\{x \mid x > 7 \text{ и } x < 3\} = \emptyset$, т. е. это пустое множество.

Если $x_1, \dots, x_n$ — произвольные числа, то запись $x = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ ($x = \min\{x_1, \dots, x_n\}$)* означает, что число x максимальное (минимальное) из чисел $x_1, \dots, x_n$.

В математических предложениях (формулировках определений, теорем и т. д.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи полезно использовать экономную логическую символику.

Здесь мы укажем лишь несколько самых простых и употребительных логических символов. Вместо слова «существует» или «найдется» используют символ $\exists$ [перевернутую латинскую букву E (от английского слова Existence — существование)], а вместо слов «любой», «каждый», «всякий» — символ $\forall$ [перевернутое латинское A (от английского слова Any — любой)]. Например, запись $\exists x \in X \dots$ означает: «существует число x из множества X , такое, что ...». Запись $\forall x \in X$ означает: «для любого числа x из множества X », а запись $\forall x \in X: \alpha$ означает: «для любого числа x из множества X выполняется (или имеет место) утверждение α ».

Для облегчения понимания и чтения утверждений, записанных с помощью логических символов, все, что относится только к каждому из них, заключают в круглые скобки. Так, например, запись

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$$

читается так: «для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , не равных x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ ».

Символ ■ в тексте означает конец доказательства.

§ 2. Вещественные числа и их основные свойства

В курсе элементарной математики дается некоторое представление о вещественных числах. Из этого курса известно, что множество вещественных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел. Рациональным называется число, которое можно представить в виде p/q , где p и q — целые числа, причем $q \neq 0$. Иррациональным называется всякое вещественное число, которое не является рациональным. Всякое рациональное число является либо целым, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, рациональные числа $3/4$ и $1/3$ можно представить в виде сле-

* От латинского maximum (minimum) — наибольший (наименьший).

дующих десятичных дробей: $3/4=0,75$; $1/3=0,333 \dots$; иррациональные числа $\sqrt{2}$ и π — в виде непериодических бесконечных десятичных дробей: $\sqrt{2}=1,41421356\dots$, $\pi=3,14159\dots$

Систематизируем сведения о вещественных числах, перечислим основные свойства вещественных чисел, а затем выведем из них некоторые следствия.

I. Сложение и умножение вещественных чисел

Для любой пары a и b вещественных чисел определены и притом единственным образом два вещественных числа $a+b$ и $a \cdot b$, называемые соответственно их *суммой* и *произведением*, причем имеют место следующие свойства. Каковы бы ни были числа a , b и c :

- 1°. $a+b=b+a$ (переместительное свойство).
- 2°. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (сочетательное свойство).
- 3°. $a \cdot b=b \cdot a$ (переместительное свойство).
- 4°. $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ (сочетательное свойство).
- 5°. $(a+b) \cdot c=ac+bc$ (распределительное свойство).

6°. Существует единственное число 0 такое, что $a+0=a$ для любого числа a .

7°. Для любого числа a существует такое число $(-a)$, что $a+(-a)=0$.

8°. Существует единственное число $1 \neq 0$ такое, что для любого числа a имеет место равенство $a \cdot 1=a$.

9°. Для любого числа $a \neq 0$ существует такое число a^{-1} , что $a \cdot a^{-1}=1$; число a^{-1} обозначают также символом $\frac{1}{a}$.

II. Сравнение вещественных чисел

Для любых двух вещественных чисел a и b установлено одно из отношений: $a=b$ (a равно b), $a>b$ (a больше b) или $b>a$. Отношение $=$ обладает свойством: если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

Отношение $>$ обладает следующими свойствами. Каковы бы ни были числа a , b и c :

- 10°. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.
- 11°. Если $a>b$, то $a+c>b+c$.
- 12°. Если $a>0$ и $b>0$, то $a \cdot b>0$.

Вместо $a>b$ пишут также $b<a$ (b меньше a). Запись $a \geq b$ (или, что то же, $b \leq a$) означает, что либо $a=b$, либо $a>b$. Соотношения $a<b$, $a \leq b$, $a>b$, $a \geq b$ называются *неравенствами*. Неравенства $a<b$ и $a>b$ — *строгие неравенства*.

III. Непрерывность вещественных чисел

13°. Пусть X и Y — два множества, состоящие из вещественных чисел. Тогда, если для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leq y$, то существует хотя бы одно число c такое, что для всех таких x и y выполняются неравенства $x \leq c \leq y$.

Отметим, что свойством непрерывности обладает множество всех вещественных чисел, но не обладает множество только рациональных чисел. Действительно, пусть множество X состоит из рациональных чисел x , для которых выполняется неравенство $x < \sqrt{2}$, а множество Y состоит из рациональных чисел y , для которых выполняется неравенство $y > \sqrt{2}$. Тогда, очевидно, для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ выполняется неравенство $x < y$, однако не существует рационального числа c такого, чтобы для всех таких x и y выполнялись неравенства $x < c < y$. В самом деле, таким числом могло бы быть только $\sqrt{2}$, но оно, как известно, не является рациональным.

Из свойств I, II, III вытекают все остальные свойства вещественных чисел. Познакомимся лишь с некоторыми из них, но в дальнейшем будем использовать и другие, не проводя их формального доказательства.

Каковы бы ни были числа a , b , c и d :

14°. Число $x = b + (-a)$ является решением уравнения $a + x = b$.

Действительно, согласно свойствам 1°, 2°, 6°, 7° имеем: $a + b + +(-a) = b$. ■

Число $b + (-a)$ называется *разностью* чисел b и a и обозначается $b - a$. Отметим, что если $a < b$ (или, что то же, $b > a$), то разность $b - a > 0$. В самом деле, из неравенства $b > a$ в силу 11° получаем: $b + (-a) > a + (-a)$ или $b - a > 0$.

15°. Число $x = ba^{-1}$ является решением уравнения $ax = b$, если $a \neq 0$.

Действительно, согласно свойствам 3°, 4°, 8°, 9° имеем: $a \cdot ba^{-1} = b$. ■

Число ba^{-1} называется *частным* чисел b и a и обозначается $\frac{b}{a}$ или $b:a$.

16°. Если $a < b$, то $-a > -b$.

В самом деле, так как $a < b$, то $b - a > 0$. Следовательно, на основании свойства 11° $b - a + (-b) > 0 + (-b)$, откуда получаем: $-a > -b$. ■

В частности, если $a > 0$, то $-a < 0$, а если $a < 0$, то $-a > 0$ (здесь использован тот факт, что $-0 = 0$, действительно, согласно свойству 6° $(-0) + 0 = -0$, а на основании свойства 7° $(-0) + +0 = 0$, откуда следует, что $-0 = 0$).

17°. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

В самом деле, если $a > b$ и $c > d$, то в силу свойства 11° $a + c > > b + c$ и $c + b > d + b$. Поэтому согласно свойству 10° $a + c > > b + d$. ■

18°. Если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

В самом деле, так как $c > d$, то согласно свойству 16° $-c < -d$. Складывая почленно неравенства $a < b$ и $-c < -d$ (это можно делать в силу свойства 17°), получаем: $a - c < b - d$. ■

19°. $a - a = 0$.

В самом деле, $a - a = a + (-a) = 0$. ■

20°. $a \cdot 0 = 0$.

В самом деле, $a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = ab - ab = 0$. ■

21°. $-(-a) = a$.

В самом деле, $-(-a) = (-(-a)) + (-a) + a = 0 + a = a$. ■

22°. $(-a)b = -ab$.

В самом деле, $(-a)b = (-a)b + ab + (-ab) = [(-a) + a] \cdot b - ab = 0 \cdot b - ab = 0 - ab = -ab$. ■

Отметим, что при замене суммы $(-a)b + ab$ произведением $[(-a) + a]b$, использовано свойство 5°. Из свойства 22°, в частности, получаем: $(-1)a = -a$.

23°. Если $a < 0$ и $b > 0$, то $ab < 0$.

В самом деле, так как $a < 0$, то $-a > 0$, поэтому в силу свойства 12°. $(-a)b > 0$. Следовательно, $(-a)b = -ab > 0$ и, значит, $ab < 0$. ■

24°. Если $a < 0$ и $b < 0$, то $ab > 0$.

В самом деле, так как $b < 0$, то $-b > 0$. Поэтому в силу свойства 23° $(-b)a < 0$. Следовательно, $(-b)a = -ab < 0$ и, значит, $ab > 0$. ■

25°. Если $a \neq 0$, то $a \cdot a = a^2 > 0$.

Справедливость данного утверждения следует из свойств 12° и 24°. В частности, $1 = 1^2 > 0$, т. е. $1 > 0$.

26°. Если $a > 0$, то $a^{-1} > 0$.

В самом деле, согласно свойствам 9° и 25° $aa^{-1} = 1 > 0$, а если предположить, что $a^{-1} \leq 0$, то в силу свойств 20° и 23° имеем: $aa^{-1} \leq 0$, т. е. получено противоречие. Следовательно, $a^{-1} > 0$. ■

Итак, мы видим, что из основных свойств I—III вещественных чисел вытекают остальные их свойства. Поэтому можно сказать, что вещественные числа представляют собой множество элементов, обладающих свойствами I—III. Такое определение вещественных чисел называется *аксиоматическим*, а свойства I—III — *аксиомами* вещественных чисел.

В заключение отметим, что, исходя из свойств I—III, любое вещественное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Однако останавливаться на рассмотрении этого вопроса не будем.

§ 3. Геометрическое изображение вещественных чисел

1. Изображение вещественных чисел точками на координатной прямой. Введем ряд предварительных понятий. Рассмотрим произвольную прямую. На ней можно указать два взаимно противоположных направления. Выберем одно из них и на рисунке будем обозначать его стрелкой (рис. 1). Пусть, кроме того, выбрана масштабная единица для измерения длин отрезков. Прямая с выбранным на ней направлением называется *осью*.

Рассмотрим на оси две произвольные точки A и B . Отрезок с граничными точками A и B будем называть *направленным*, если

указано, какая из точек A и B считается началом, а какая — концом отрезка. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначим $\overline{AB}$ и будем считать, что он направлен от начала к концу. Отметим, что в записи $\overline{AB}$ буква, обозначающая начало направленного отрезка, пишется *первой*, а буква, обозначающая его конец, — *второй*. Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается так: $|\overline{AB}|$ или $|AB|$.

Для направленных отрезков, лежащих на оси (или параллельных оси), вводится понятие величины направленного отрезка. Величиной AB направленного отрезка $\overline{AB}$ называется число, равное $|\overline{AB}|$, если направления отрезка и оси совпадают, и равное $-|\overline{AB}|$, если эти направления противоположны. Для отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, изображенных на рис. 2, $AB = -|\overline{AB}|$, $CD = |\overline{CD}|$.



Рис. 1

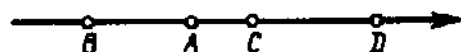


Рис. 2

Заметим, что величины направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ при любом направлении оси отличаются знаками:

$$AB = -BA.$$

Если точки A и B совпадают, то величину направленного отрезка $\overline{AB}$ будем считать равной нулю.

Для любых трех точек A , B и C на оси справедливо равенство

$$AB + BC = AC,$$

которое назовем *основным тождеством* (в дальнейшем оно неоднократно используется).

Справедливость основного тождества легко устанавливается из рисунка, но при этом нужно рассмотреть различные случаи взаимного расположения точек A , B и C на оси. Если все три точки A , B и C различны, то таких случаев шесть (рис. 3). В каждом из этих случаев основное тождество проверяется элементарно.

Перейдем теперь к геометрическому изображению вещественных чисел. Рассмотрим какую-нибудь прямую. Выберем на ней направление (тогда она станет осью) и некоторую точку O (начало координат). Прямую с выбранным направлением и началом координат назовем *координатной прямой* (считаем, что масштабная единица выбрана). Пусть M — произвольная точка на прямой (рис. 4, а). Поставим в соответствие точке M число x , равное величине OM направленного отрезка $\overline{OM}$. Число x называется *координатой* точки M . Тем самым каждой точке координатной прямой будет соответствовать определенное вещественное число — ее координата. Справедливо и обратное: каждому вещественному числу x соответствует некоторая точка на координатной прямой, а именно такая точка M , координата которой равна x .

Таким образом, вещественные числа можно изображать точками на координатной прямой. Поэтому около точки на координатной прямой часто указывают число — ее координату (рис. 4, б).

Пусть точка M_1 имеет координату x_1 , а точка M_2 — координату x_2 (рис. 5). Выразим величину M_1M_2 направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ через координаты точек M_1 и M_2 . Согласно основному тождеству

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

откуда $M_1M_2 = OM_2 - OM_1$. Но $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$, поэтому

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

Эту формулу будем часто использовать в аналитической геометрии.

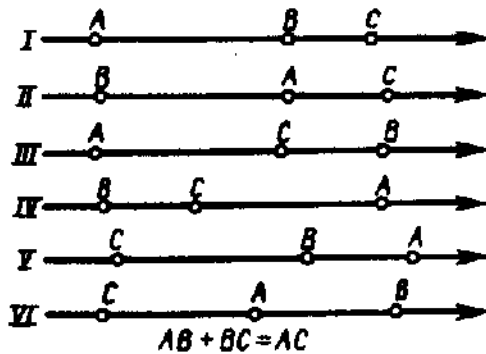


Рис. 3

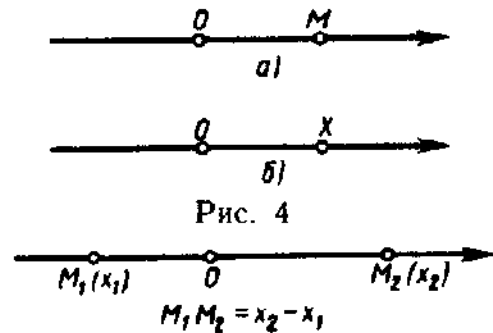


Рис. 4

Рис. 5

2. Некоторые наиболее употребительные числовые множества.

Пусть a и b — два числа, причем $a < b$. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b]; \quad \{x | a < x \leq b\} = (a, b]; \quad \{x | a \leq x < b\} = [a, b);$$

$$\{x | a < x < b\} = (a, b);$$

$$\{x | a \leq x\} = [a, +\infty); \quad \{x | a < x\} = (a, +\infty);$$

$$\{x | x \leq b\} = (-\infty, b]; \quad \{x | x < b\} = (-\infty, b).$$

Множество всех вещественных чисел будем обозначать так:

$$\{x | -\infty < x < +\infty\} \text{ или } (-\infty, +\infty).$$

Все эти множества называются *промежутками*, причем $[a, b]$ — *отрезок (сегмент)*, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$ — *полуинтервалы*, а (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ и $(-\infty, +\infty)$ — *интервалы*. Промежутки $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ и (a, b) называются *конечными*; a и b называются их *концами*. Остальные промежутки называются *бесконечными*.

Числовым промежуткам соответствуют промежутки на координатной прямой. Например, сегмент $[x_1, x_2]$ изображается на координатной прямой отрезком M_1M_2 таким, что точка M_1 имеет координату x_1 , а точка M_2 — координату x_2 (рис. 5). Изображением множества $(-\infty, +\infty)$ всех чисел служит вся координатная прямая. Поэтому множество $(-\infty, +\infty)$ называется также *числовой прямой*, а любое число — *точкой* этой прямой. Пусть a — произвольная точка числовой прямой и δ — положительное число. Интервал $(a - \delta, a + \delta)$ называется δ -*окрестностью* точки a .

§ 4. Грани числовых множеств

Говорят, что множество X ограничено сверху (снизу), если существует число c такое, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $x \leq c$ ($x \geq c$). Число c в этом случае называется *верхней (нижней) гранью* множества X .

Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Так, например, любой конечный промежуток $([a, b], [a, b), (a, b], (a, b))$ ограничен. Интервал $(a, +\infty)$ есть множество, ограниченное снизу, но не ограниченное сверху; а вся числовая прямая $(-\infty, +\infty)$ есть множество, не ограниченное ни сверху, ни снизу.

Очевидно, что любое ограниченное сверху (снизу) множество X имеет бесконечно много верхних (нижних) граней. В самом деле, если число c является верхней (нижней) гранью множества X , то любое число c' , большее (меньшее) числа c , — также верхняя (нижняя) грань множества X , так как из справедливости неравенства $x \leq c$ ($x \geq c$) следует, что $x \leq c'$ ($x \geq c'$).

Естественно, возникает вопрос о существовании наименьшей из верхних граней ограниченного сверху множества и наибольшей из нижних граней ограниченного снизу множества.

Наименьшая из верхних граней ограниченного сверху множества X называется *точной верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X^*$, а наибольшая из нижних граней ограниченного снизу множества X называется *точной нижней гранью* этого множества и обозначается символом $\inf X^{**}$.

Примеры. Пусть $X = (a, b)$. Тогда число b является точной верхней гранью множества X , а число a — его точной нижней гранью, т. е. $b = \sup X$, $a = \inf X$. Пусть $X = (a, +\infty)$. Тогда $a = \inf X$, а верхних граней и в том числе точной верхней грани данное множество не имеет.

Точная верхняя грань ($\sup X$) обладает следующим важным свойством. Как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, найдется $x \in X$ такое, что $x > \sup X - \varepsilon$ ***. В самом деле, если бы такого числа x не нашлось, то число $\sup X - \varepsilon$ было бы также верхней гранью множества X и тогда число $\sup X$ не было бы точной (т. е. наименьшей) верхней гранью. Другими словами, данное свойство выражает тот факт, что число $\sup X$ является наименьшим среди чисел, ограничивающих множество X сверху, и не может быть уменьшено.

Отмеченное свойство точной верхней грани можно переформулировать следующим образом: если $c = \sup X$, то для любого числа $c' < c$ существует число $x \in X$ такое, что $x > c'$ ****. Чтобы убедиться в равносильности данных формулировок, достаточно взять c' и ε , связанные равенством $c' = c - \varepsilon$, из которого следует, что условие $\varepsilon > 0$ эквивалентно условию $c' < c$.

* supremum (лат.) — наивысшее.

** infimum (лат.) — наинизшее.

*** Или с помощью логических символов: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X) : x > \sup X - \varepsilon$.

**** Или с помощью логических символов: $(\forall c' < c)(\exists x \in X) : x > c'$.

Аналогичным свойством обладает и точная нижняя грань — как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, найдется $x \in X$ такое, что $x < \inf X + \varepsilon$. (Сформулируйте данное свойство в другом виде самостоятельно.)

Возникает вопрос, всегда ли ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема.

Теорема 1.1. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть X — непустое множество, ограниченное сверху. Тогда множество Y чисел, ограничивающих X сверху, не пусто. Из определения верхней грани следует, что для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ имеет место неравенство $x \leq y$. В силу свойства непрерывности вещественных чисел существует такое число c , что для любых x и y выполняются неравенства

$$x \leq c \leq y. \quad (1)$$

Из первого из неравенств (1) следует, что число c ограничивает множество X сверху, т. е. является верхней гранью, а из второго, — что оно наименьшее из таких чисел, т. е. является точной верхней гранью.

Случай существования точной нижней грани у не пустого ограниченного снизу множества рассматривается аналогично. ■

Если множество X не ограничено сверху (снизу), то условимся писать: $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

§ 5. Абсолютная величина числа

Понятие абсолютной величины числа и неравенства, связанные с абсолютными величинами, в дальнейшем часто используются.

Определение. Абсолютной величиной (или модулем) числа x называется само число x , если $x \geq 0$, число $-x$, если $x < 0$.

Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из определения вытекает ряд свойств абсолютной величины числа.

1°. $|x| \geq 0$. Действительно:

1) если $x \geq 0$, то $|x| = x \geq 0$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$; но $-x > 0$, так как $x < 0$, т. е. $|x| > 0$. Из 1) и 2) получаем, что $|x| \geq 0$.

2°. $|x| = |-x|$. Действительно:

1) если $x \geq 0$, то $-x \leq 0$, и тогда $|-x| = -(-x) = x = |x|$;

2) если $x < 0$, то $-x > 0$, и тогда $|-x| = -x = |x|$, так как $x < 0$. Из 1) и 2) получаем, что $|x| = |-x|$.

3°. $-|x| \leq x \leq |x|$. Действительно:

1) если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $-x \leq 0$. Отсюда $|x| \geq -x$, т. е. $-|x| \leq x = |x|$;

2) если $x < 0$, то $|x| = -x$, откуда $-|x| = x$. Далее, так как $x < 0$, то $2x < 0$, или $x + x < 0$, откуда $x < -x$, т. е. $x < |x|$. Итак, $-|x| = x < |x|$.

Из 1) и 2) получаем, что $-|x| \leq x \leq |x|$.

Поскольку следующие три свойства очень важны, докажем их в виде теорем.

Теорема 1.2. Пусть ε — положительное число. Тогда неравенства $|x| \leq \varepsilon$ и $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ равносильны.*

Доказательство. Пусть $|x| \leq \varepsilon$. Тогда:

1) если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и, значит, $x \leq \varepsilon$, откуда $0 \leq x \leq \varepsilon$.

2) если $x < 0$ то $|x| = -x$ и, значит, $-x \leq \varepsilon$, откуда $-\varepsilon \leq x \leq 0$. Объединяя 1) и 2), при любом x получаем: $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.

Пусть справедливы неравенства $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Это означает, что одновременно выполняются неравенства $x \leq \varepsilon$ и $x \geq -\varepsilon$. Из последнего неравенства имеем: $-x \leq \varepsilon$. Так как, по определению, $|x|$ есть либо x , либо $-x$, то $|x| \leq \varepsilon$. ■

Теорема 1.3. Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство. Пусть x и y — любые числа. Согласно свойству 3° для них справедливы неравенства

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ и } -|y| \leq y \leq |y|.$$

Складывая их почленно, получаем

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|).$$

По теореме 1.2 это двойное неравенство равносильно неравенству $|x + y| \leq |x| + |y|$. ■

Заметим, что $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Теорема 1.4. Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Доказательство. Для любых чисел x и y имеем

$$x = y + (x - y).$$

По теореме 1.3 справедливо неравенство

$$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y|.$$

Откуда получаем: $|x - y| \geq |x| - |y|$. ■

Заметим, что $|x + y| \geq |x| - |y|$.

В заключение отметим, что каковы бы ни были два числа x и y , имеют место легко проверяемые соотношения:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ и } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ если } y \neq 0.$$

* Это утверждение с помощью логических символов можно записать так:

$\forall \varepsilon > 0 : |x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие предела и понятие функции — фундаментальные понятия математического анализа. Начало изучению понятия предела положено в элементарной математике, где с помощью предельных переходов определяются длина окружности, объем цилиндра, конуса и т. д. Оно также было использовано при определении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Операция предельного перехода является одной из основных операций анализа. В настоящей главе рассматривается простейшая форма операции предельного перехода, основанная на понятии предела числовой последовательности. Понятие предела числовой последовательности позволит в дальнейшем определить и другие более сложные формы операции предельного перехода.

§ 1. Числовые последовательности

1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. Числовые последовательности изучают уже в средней школе. Примерами таких последовательностей могут служить: 1) последовательность всех членов арифметической и геометрической прогрессий; 2) последовательность периметров правильных n -угольников, вписанных в данную окружность; 3) последовательность $x_1=1$, $x_2=1,4$, $x_3=1,41$... приближенных значений $\sqrt{2}$.

Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

Определение. Если каждому числу n из натурального ряда чисел

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

поставлено в соответствие вещественное число x_n , то множество вещественных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*.*

Числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ будем называть *элементами* (или *членами*) последовательности (1), символ x_n — *общим элементом* (или *членом*) последовательности, а число n — его *номером*. Сокращенно последовательность (1) будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначает последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Например, формула $x_n = 1 + (-1)^n$

* Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n; x_n)$, в которых первое число принимает последовательно значения $1, 2, 3, \dots$

задает последовательность: 0,2, 0,2, ... Обращая дробь $\frac{1}{3}$ в десятичную и оставляя один, два, три и т. д. знака после запятой, получаем последовательность

$$x_1 = 0,3; x_2 = 0,33; x_3 = 0,333, \dots; x_n = 0,333\dots 3, \dots$$

По самому определению, последовательность содержит бесконечное число элементов: любые два ее элемента отличаются, по крайней мере, своими номерами.

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности. На рис. 6, а и б изображены соответственно последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ и

$$\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

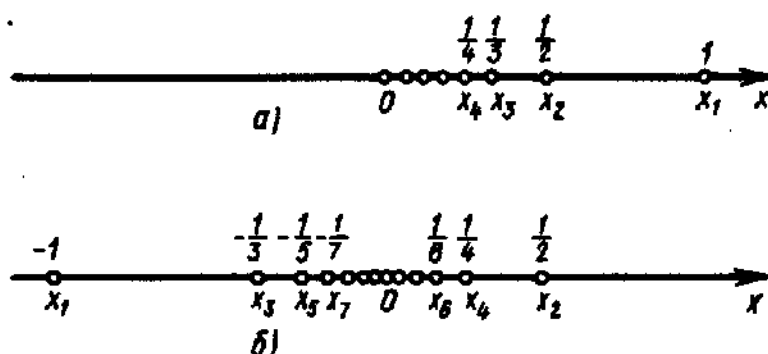


Рис. 6

Введем арифметические действия над числовыми последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число m назовем последовательность $mx_1, mx_2, \dots, mx_n, \dots$;

суммой данных последовательностей назовем последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$;

разностью — последовательность $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$;

произведением — последовательность $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n, \dots$;

частным — последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots$, если все члены последовательности $\{y_n\}$ отличны от нуля.

Указанные действия над последовательностями символически записываются так:

$$\begin{aligned} m\{x_n\} &= \{mx_n\}, \{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}, \\ \{x_n\} - \{y_n\} &= \{x_n - y_n\}, \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}, \\ \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} &= \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, y_n \neq 0. * \end{aligned}$$

2. Ограниченные и неограниченные последовательности. Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (число m) такое, что любой эле-

* $y_n \neq 0$ означает, что значения y_n отличны от нуля при любом n .

мент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам $m \leq x_n \leq M$.

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности последовательности можно записать в виде $|x_n| \leq A$.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$ (т. е. либо $x_n > A$, либо $x_n < -A$).

Из данных определений следует, что если последовательность ограничена сверху, то все ее элементы принадлежат промежутку $(-\infty, M]$; если она ограничена снизу — промежутку $[m, +\infty)$, а если ограничена и сверху и снизу — промежутку $[m, M]$. Неограниченная последовательность может быть ограничена сверху (снизу).

Рассмотрим примеры ограниченных и неограниченных последовательностей.

1. Последовательность $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2. Последовательность $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

3. Последовательность $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ ограничена, так как любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам $0 \leq x_n \leq 1$ ($m = 0, M = 1$).

4. Последовательность $-1, 2, -3, 4, -5, \dots, (-1)^n n, \dots$ неограниченная. В самом деле, каково бы ни было число A среди элементов x_n этой последовательности, найдутся элементы, для которых будет выполняться неравенство $|x_n| > A$.

С помощью логических символов данные выше определения можно записать следующим образом:

последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если $(\exists M)(\forall x_n): x_n \leq M$;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, если $(\exists m)(\forall x_n): x_n \geq m$;

последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если $(\exists A > 0)(\forall x_n): |x_n| \leq A$,

последовательность $\{x_n\}$ неограничена, если $(\forall A > 0)(\forall x_n): |x_n| > A$.

Сравнивая запись с помощью логических символов двух последних определений, видим, что при построении отрицаний символы $\exists$ и $\forall$ заменяют друг друга.

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что при $n > N^*$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

* «При $n > N$ » означает: «для всех элементов последовательности с номерами $n > N$ ».

Символическая запись определения бесконечно большой последовательности:

$$(\forall A > 0)(\exists N)(\forall n > N): |x_n| > A.$$

З а м е ч а н и е. Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность $1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, 1, n+1, \dots$ не является бесконечно большой, поскольку при $A > 1$ неравенство $|x_n| > A$ выполняется не для всех элементов x_n с нечетными номерами.

Определение 2. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Символическая запись определения бесконечно малой последовательности:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N): |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Пример 1. Используя определение 1, докажем, что последовательность $\{n\}$ является бесконечно большой.

Возьмем любое число $A > 0$. Из неравенства $|x_n| = |n| > A$ получаем $n > A$. Если взять $N \geq A$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n| > A$, т. е. согласно определению 1 последовательность $\{n\}$ бесконечно большая.

Пример 2. Используя определение 2, докажем, что последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Из неравенства $|\alpha_n| = |1/n| < \varepsilon$ получаем $n > 1/\varepsilon$. Если взять $N = [1/\varepsilon]^*$, то для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $n \geq [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$, откуда $1/n = |\alpha_n| < \varepsilon$. Таким образом, согласно определению 2 последовательность $\{1/n\}$ является бесконечно малой.

Докажем теорему, устанавливающую связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

Теорема 2.1. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ — бесконечно большая.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Согласно определению 1 для этого A существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n| > A$. Отсюда получаем, что $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$

* Символ $[x]$ обозначает целую часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[1] = 1$, $[3, 1] = 3$, $[0, 7] = 0$, $[-0, 5] = -1$, $[-172, 9] = -173$ и т. д. Очевидно, $[x] + 1 > x$.

для всех $n > N$. А это значит, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Доказательство второй части теоремы проводится аналогично. ■

4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 2.2. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малые последовательности.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Пусть ε — произвольное положительное число, N_1 — номер, начиная с которого $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, а N_2 — номер, начиная с которого $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (Такие номера N_1 и N_2 найдутся по определению бесконечно малой последовательности.) Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n > N$ будут одновременно выполняться два неравенства: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это значит, что последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. ■

Следствие. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 2.3. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ бесконечно малая. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_1 такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ при $n > N_1$, а так как $\{\beta_n\}$ также бесконечно малая последовательность, то для $\varepsilon = 1$ существует номер N_2 такой, что $|\beta_n| < 1$ при $n > N_2$. Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$; тогда при $n > N$ будут выполняться оба неравенства. Следовательно, при $n > N$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ бесконечно малая. ■

Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Замечание. Частное двух бесконечно малых последовательностей может не быть бесконечно малой последовательностью и может даже не иметь смысла. Например, если $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n$, то все элементы $\{\alpha_n/\beta_n\}$ равны единице и данная последовательность является ограниченной. Если $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n^2$, то последовательность $\{\alpha_n/\beta_n\}$ бесконечно большая, а если $\alpha_n = 1/n^2$, $\beta_n = 1/n$, то — бесконечно малая. Если, начиная с некоторого номера, элементы $\{\beta_n\}$ равны нулю, то $\{\alpha_n/\beta_n\}$ не имеет смысла.

Теорема 2.4. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная, а $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательности. Требуется доказать, что последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ бесконечно малая. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует число $A > 0$ такое, что любой элемент x_n удовлетворяет неравенству $|x_n| \leq A$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, для положительного числа $\frac{\varepsilon}{A}$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$. Следовательно, при $n > N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ бесконечно малая. ■

Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.

Перейдем теперь к одному из важнейших в математическом анализе понятию предела числовой последовательности.

§ 2. Сходящиеся последовательности

1. Понятие сходящейся последовательности. Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N) (\forall n > N) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом число a , то символически это записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^* \text{ или } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется *расходящейся*.

Пример. Используя определение предела последовательности, докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$, то для нахождения значений n , удовлетворяющих не-

* limes (лат.) — предел.

равенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, достаточно решить неравенство $1/(n+1) < \varepsilon$, откуда получаем $n > (1-\varepsilon)/\varepsilon$. Следовательно, в качестве N можно взять целую часть числа $(1-\varepsilon)/\varepsilon$, т. е. $N = [(1-\varepsilon)/\varepsilon]$. Тогда неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться при всех $n > N$. Этим и доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a . Тогда $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ является бесконечно малой последовательностью, так как для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, любой элемент x_n последовательности, имеющей пределом число a , можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \quad (3)$$

где α_n — элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$. Очевидно, справедливо и обратное: если x_n можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Представление (3) используется при доказательствах теорем о пределах последовательностей.

З а м е ч а н и е 2. Неравенство (1) равносильно неравенствам

$$- \varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

которые означают, что элемент x_n находится в ε -окрестности точки a (рис. 7). Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε -окрестности точки a существует номер N такой, что все элементы x_n с номерами $n > N$ находятся в этой ε -окрестности.

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, что бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. Иногда говорят, что она имеет *бесконечный* предел, и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \right).$$

Предел последовательности, как он был определен ранее, будем называть иногда в отличие от бесконечного предела *конечным* пределом.

З а м е ч а н и е 4. Очевидно, всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число $a=0$.

2. Основные свойства сходящихся последовательностей. Докажем лемму, которая понадобится при доказательстве теоремы 2.5.

Л е м м а 2.1. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c , то $c=0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $c \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Тогда по определению бесконечно малой последовательности существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так как $\alpha_n = c$, а $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$, то последнее неравенство можно переписать в виде $|c| < \frac{|c|}{2}$, откуда $1 < \frac{1}{2}$. Полученное противоречие доказывает, что неравенство $c \neq 0$ не может иметь места и, значит, $c = 0$. ■

Теорема 2.5. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b . Тогда по формуле (3) для элементов x_n получаем

$$x_n = a + \alpha_n \text{ и } x_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n — элементы бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Приравняв правые части этих соотношений, найдем, что $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Так как все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n - \beta_n\}$ равны одному и тому же числу $b - a$, то по лемме 2.1 $b - a = 0$, т. е. $b = a$. ■

Теорема 2.6. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и число a — ее предел. Пусть, далее, ε — произвольное положительное число и N — номер, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$$

для всех $n > N$. Пусть $A = \max\{|a| + \varepsilon, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}$. Очевидно, $|x_n| \leq A$ для всех номеров n , что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. ■

З а м е ч а н и е. Ограниченная последовательность может и не быть сходящейся. Например, последовательность $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ очевидно ограничена, но не сходится. Докажем это. Предположим, что данная последовательность имеет предел число a . Тогда для $\varepsilon = 1/2$ существует номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n - a| < 1/2$. Так как x_n принимает попеременно значения 1 и -1 , то $|1 - a| < 1/2$ и $|(-1) - a| < 1/2$. Используя эти неравенства, получаем

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < 1/2 + 1/2 = 1,$$

т. е. $2 < 1$. Полученное противоречие доказывает расходимость данной последовательности.

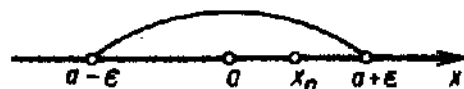


Рис. 7

Теорема 2.7. Сумма (разность) двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Пусть a и b — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (3):

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

По теореме 2.2 последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\}$ также бесконечно малая, и поэтому последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a \pm b$. ■

Теорема 2.8. Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Пусть a и b — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (3):

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Согласно теоремам 2.2—2.4 последовательность $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n\}$ бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{x_n y_n - ab\}$ также бесконечно малая, и поэтому последовательность $\{x_n y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число ab . ■

Теорема 2.9. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля, * есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Пусть a и b ($b \neq 0$) — соответственно пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда по формуле (3):

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n} = \frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right).$$

В силу свойств бесконечно малых последовательностей последовательность $\left\{ \alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n \right\}$ бесконечно малая. Покажем, что

* В силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ элементы y_n , начиная с некоторого номера N , не обращаются в нуль, поэтому частное $\{x_n/y_n\}$ имеет смысл для всех $n > N$.

$\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — ограниченная последовательность. Так как $y_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ найдется номер N такой, что для всех $n > N$ будет $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Поэтому

$$|y_n| = |b - (b - y_n)| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

т. е. $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ для всех $n > N$, что и означает ограниченность последовательности $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

По теореме 2.4 последовательность $\left\{\frac{1}{y_n} \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \beta_n\right)\right\}$ бесконечно малая, поэтому последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ также бесконечно малая. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится и имеет своим пределом число $\frac{a}{b}$. ■

Теоремы, доказанные в этом пункте, имеют большое не только теоретическое, но и практическое значение.

Пример. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1}$.

При $n \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, следовательно, применить теорему о пределе частного нельзя, так как в условии этой теоремы предполагается существование конечных пределов. Поэтому сначала преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2 . Затем, применяя теоремы о пределе частного и о пределе суммы, найдем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{3n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n + 1/n^2}{3 - 1/n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 1/n + 1/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - 1/n^2)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)} = \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3. Предельный переход в неравенствах. Теорема 2.10. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$).

Доказательство. Пусть все элементы x_n , начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$. Требуется доказать неравенство $a \geq b$. Предположим противное, т. е. что $a < b$.

Так как a — предел $\{x_n\}$, то для $\varepsilon = b - a$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$, которое равносильно следующим двум неравенствам: $-(b - a) <$

$< x_n - a < b - a$. Из правого неравенства получаем: $x_n < b$ при $n > N$, а это противоречит условию теоремы. Следовательно, $a \geq b$. Случай $x_n \leq b$ рассматривается аналогично. ■

Следствие 1. Если элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n$, то их пределы удовлетворяют неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

В самом деле, начиная с некоторого номера, элементы последовательности $\{y_n - x_n\}$ неотрицательны, а поэтому неотрицателен и ее предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Следствие 2. Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ сходятся на отрезке $[a, b]$, то и ее предел с также находится на этом отрезке.

В самом деле, так как $a \leq x_n \leq b$, то $a \leq c \leq b$.

Следующая теорема играет важную роль в различных приложениях.

Теорема 2.11. Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, причем $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех n , и пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел a . Тогда последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел a .

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По этому ε для последовательности $\{x_n\}$ найдется номер N_1 такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_1$, т. е.

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \quad (4)$$

По тому же ε для последовательности $\{z_n\}$ найдется номер N_2 такой, что $|z_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_2$, т. е.

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \quad (5)$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будут выполняться одновременно неравенства (4) и (5). Используя подчеркнутые неравенства, а также неравенства, данные в условии теоремы, получаем

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Отсюда

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Это означает, что предел последовательности $\{y_n\}$ равен a . ■

§ 3. Монотонные последовательности

1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей. **Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ для всех n ; *неубывающей*, если $x_n \leq x_{n+1}$ для всех n ; *убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$ для всех n ; *невозрастающей*, если $x_n \geq x_{n+1}$ для всех n .

Все такие последовательности объединяются общим названием: *монотонные последовательности*. Возрастающие и убывающие последовательности называются также *строго монотонными*.

Рассмотрим примеры монотонных последовательностей.

1. Последовательность $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ убывающая и ограниченная.

2. Последовательность $1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, \dots, 1/n, 1/n, \dots$ невозрастающая и ограниченная.

3. Последовательность $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ возрастающая и неограниченная.

4. Последовательность $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots$ неубывающая и неограниченная.

5. Последовательность $1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots$ возрастающая и ограниченная.

Отметим, что монотонные последовательности ограничены, по крайней мере, с одной стороны: неубывающие последовательности — снизу ($x_n \geq x_1$ для всех n), невозрастающие — сверху ($x_n \leq x_1$ для всех n). Оказывается, что если монотонная последовательность ограничена с обеих сторон, т. е. просто ограничена, то она сходится. Немонотонные последовательности этим свойством не обладают. Например, немонотонная последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не сходится (см. замечание к теореме 2.6).

Имеет место следующая основная теорема о монотонных последовательностях.

Т е о р е м а 2.12. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай неубывающей последовательности.

Пусть $x_n \leq x_{n+1}$ для всех n и существует число M такое, что все элементы x_n не больше M , т. е. $x_n \leq M$. Рассмотрим числовое множество X , состоящее из элементов данной последовательности. По условию это множество ограничено сверху и непусто. Поэтому в силу теоремы 1.1 множество X имеет точную верхнюю грань. Обозначим ее через a и докажем, что a является пределом данной последовательности.

Так как a — точная верхняя грань множества элементов последовательности $\{x_n\}$, то согласно свойству точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $x_N > a - \varepsilon$. Поскольку $\{x_n\}$ — неубывающая последовательность, то при $n > N$ будет $x_n > a - \varepsilon$. С другой стороны, по определению верхней грани $x_n \leq a < a + \varepsilon$ для всех n . Таким образом, при $n > N$ получаем неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Это и означает, что число a — предел последовательности $\{x_n\}$.

Случай невозрастающей последовательности рассматривается аналогично. ■

З а м е ч а н и е. Ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости.

В самом деле, если монотонная последовательность ограничена, то в силу теоремы 2.12 она сходится; если же монотонная последовательность сходится, то по теореме 2.6 она ограничена.

2. Число e . Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Докажем, что она сходится. Для этого достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая и ограничена сверху. Применяя формулу бинома Ньютона* [гл. 6, § 3, п. 4, формула (10)], получим

$$x_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n}.$$

Представим это выражение в следующей форме:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

Аналогичным образом представим x_{n+1} :

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим теперь, что $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$ при $0 < k < n$. Поэтому каждое слагаемое в выражении для x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для x_n и, кроме того, у x_{n+1} по сравнению с x_n добавляется еще одно положительное слагаемое. Следовательно, $x_n < x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Для доказательства ограниченности сверху данной последовательности заметим, что каждое выражение в круглых скобках в соотношении (1) меньше единицы. Учитывая также, что $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ при $n > 2$, получаем

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, придем к неравенству

$$x_n < 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

* Ньютон Исаак (1642—1727) — великий английский физик, механик, астроном и математик.

Таким образом, доказано, что последовательность $\{(1 + 1/n)^n\}$ — возрастающая и ограничена сверху. По теореме 2.12 она имеет предел. Этот предел обозначают буквой e . Итак, по определению,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Отметим, что число e играет большую роль во многих вопросах математики. Оно, в частности, является основанием натуральных логарифмов. В настоящем параграфе дано только определение числа e . Далее будет рассмотрен способ вычисления этого числа с любой степенью точности.

Здесь лишь отметим, что так как $x_n < 3$ и из (1) непосредственно очевидно, что $2 < x_n$, то число e заключено в пределах $2 \leq e \leq 3$. Доказано, что число e иррациональное.

Докажем теорему, которая в дальнейшем неоднократно используется при доказательстве других теорем.

§ 4. Теорема о вложенных отрезках

Пусть дана последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ таких, что каждый последующий содержится в предыдущем: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$, т. е.

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \text{ для всех } n, \quad (1)$$

и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Будем называть эту последовательность *последовательностью вложенных отрезков*.

Теорема 2.13. *Для любой последовательности вложенных отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.*

Доказательство. Из неравенств (1) следует, что левые концы отрезков образуют неубывающую последовательность

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots, \quad (2)$$

а правые концы — невозрастающую последовательность

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \dots \quad (3)$$

При этом последовательность (2) ограничена сверху, а последовательность (3) ограничена снизу, так как $a_n \leq b_1$, а $b_n \geq a_1$, для любого n . Следовательно, на основании теоремы 2.12 эти последовательности имеют пределы. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c'$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c''$. Тогда

из условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c'' - c' = 0$$

следует, что $c' = c''$, т. е. последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел. Обозначая этот предел буквой c , получаем, что для любого n справедливы неравенства $a_n \leq c \leq b_n$, т. е. точка c принадлежит всем отрезкам последовательности (1).

Докажем теперь, что такая точка только одна. Допустим, что существует еще одна точка c_1 ($c_1 \neq c$), принадлежащая всем отрезкам последовательности (1). Тогда для любого n должно выполняться неравенство $b_n - a_n \geq |c_1 - c|$ и, следовательно,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq |c_1 - c| \neq 0$, что противоречит условию теоремы. ■

З а м е ч а н и е. Теорема неверна, если вместо отрезков рассматривать интервалы. Например, для последовательности вложенных интервалов

$$(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset (0, 1/4) \supset \dots \supset (0, 1/2^n) \supset \dots \quad (4)$$

не существует точки, принадлежащей всем интервалам. В самом деле, какую бы точку c на интервале $(0, 1)$ ни взять, всегда найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $1/2^n < c$ и, следовательно, точка c не будет принадлежать интервалам последовательности (4), начиная с интервала $(0, 1/2^{N+1})$.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые сведения из аналитической геометрии. Поэтому следующая глава посвящена этому разделу математики.

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия — область математики, изучающая геометрические образы алгебраическими методами. Еще в XVII в. французским математиком Декартом был разработан метод координат, являющийся аппаратом аналитической геометрии.

В основе метода координат лежит понятие системы координат. Мы познакомимся с прямоугольной (или декартовой) и полярной системами координат.

§ 1. Прямоугольная система координат

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy , имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу (рис. 8), образуют *прямоугольную систему координат на плоскости*.

Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*, а обе оси вместе — *осями координат*. Точка O пересечения осей называется *началом координат*. Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy , называется *координатной плоскостью* и обозначается Oxy .

Пусть M — произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy .

Прямоугольными координатами x и y точки M будем называть соответственно величины OA и OB направленных отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$: $x = OA$, $y = OB$.

Координаты x и y точки M называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*. Тот факт, что точка M имеет координаты x и y , символически обозначают так: $M(x; y)$. При этом первой в скобках указывают абсциссу, а второй — ординату. Начало координат имеет координаты $(0; 0)$.

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел $(x; y)^*$ — ее прямоугольные координаты, и, обратно, на каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует, и притом одна, точка M плоскости Oxy такая, что ее абсцисса равна x , а ордината y .

Итак, введение прямоугольной системы координат на плоскости позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством пар чисел, что дает возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

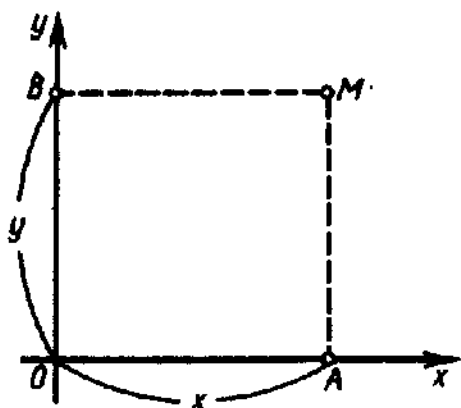


Рис. 8

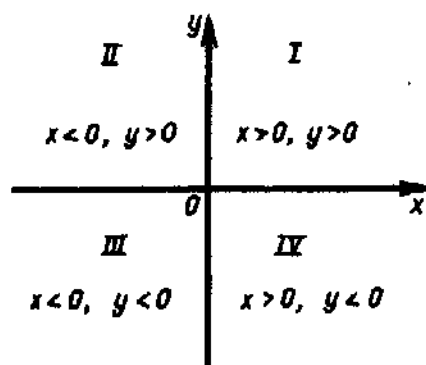


Рис. 9

Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют *четвертями*, *квадрантами* или *координатными углами* и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV так, как показано на рис. 9. На рис. 9 указаны также знаки координат точек в зависимости от их расположения в той или иной четверти.

§ 2. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Расстояние между двумя точками. Теорема 3.1. Для любых двух точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A соответственно на оси Oy и Ox и обозначим через K точку пересечения прямых M_1B и M_2A (рис. 10). Точка K

* Здесь речь идет об упорядоченной паре чисел, т. е. о наборе из двух чисел, в котором указано, какое число является первым, а какое — вторым. Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ различны, так как в первой из них первым числом является x , а во второй — y .

имеет координаты $(x_2; y_1)$, поэтому (см. гл. 1, § 3)

$$|M_1K| = |x_2 - x_1|; |M_2K| = |y_2 - y_1|.$$

Так как треугольник M_1M_2K — прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$d = \sqrt{(M_1K)^2 + (M_2K)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \blacksquare$$

2. Площадь треугольника. Теорема 3.2. Для любых точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь s треугольника ABC выражается формулой

$$s = \frac{1}{2} |[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]|. \quad (2)$$

Доказательство. Площадь треугольника ABC , изображенного на рис. 11, можно найти так:

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}, \quad (3)$$

где S_{ADEC} , S_{BCEF} , S_{ABFD} — площади соответствующих трапеций. Поскольку

$$S_{ADEC} = |DE| \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2},$$

$$S_{BCEF} = |EF| \frac{|EC| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)}{2},$$

$$S_{ABFD} = |DF| \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2},$$

подставив выражения для этих площадей в равенство (3), получим формулу

$$s = \frac{1}{2} |[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]|,$$

из которой следует формула (2). Для любого другого расположения треугольника ABC формула (2) доказывается аналогично. $\blacksquare$

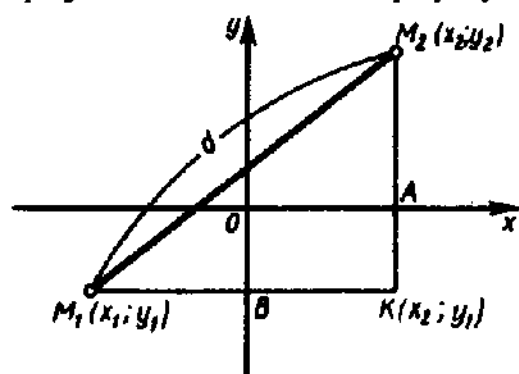


Рис. 10

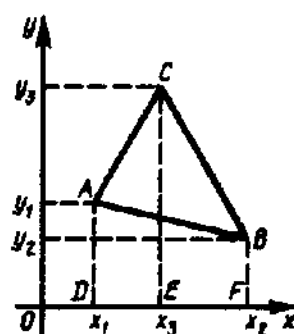


Рис. 11

Пример. Даны точки $A(1; 1)$, $B(6; 4)$, $C(8; 2)$. Найти площадь треугольника ABC . По формуле (2):

$$s = \frac{1}{2} |[(6 - 1)(2 - 1) - (8 - 1)(4 - 1)]| = \frac{1}{2} |[-16]| = 8.$$

3. Деление отрезка в данном отношении. Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M — любая точка этого отрезка, отличная от точки M_2 (рис. 12).

Число λ , определяемое равенством

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}, \quad (4)$$

называется *отношением*, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 .

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению λ и данным координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M .

Решить эту задачу позволяет следующая теорема.

Теорема 3.3. Если точка $M(x; y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , то координаты этой точки определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (5)$$

где $(x_1; y_1)$ — координаты точки M_1 ; $(x_2; y_2)$ — координаты точки M_2 .

Доказательство. Пусть прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ox . Опустим перпендикуляры из точек M_1 , M , M_2 на ось Ox и обозначим точки их пересечения с осью Ox соответственно

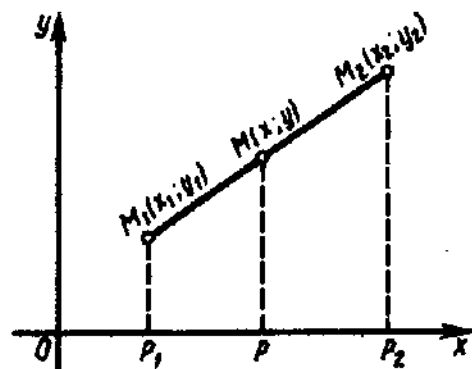


Рис. 12

через P_1 , P и P_2 (рис. 12). На основании теоремы элементарной геометрии о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda,$$

но $|P_1P| = |x - x_1|$, $|PP_2| = |x_2 - x|$ (см. гл. 1, § 3).

Так как числа $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$ одного и того же знака (при $x_1 < x_2$ они положительны, а при $x_1 > x_2$ — отрицательны), то $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$. Поэтому $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, откуда $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Если пря-

мая M_1M_2 перпендикулярна оси Ox , то $x_1 = x_2 = x$ и эта формула также, очевидно, верна. Получена первая из формул (5). Вторая формула получается аналогично. ■

Следствие. Если $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ — две произвольные точки и точка $M(x; y)$ — середина отрезка M_1M_2 , т. е. $|M_1M| = |MM_2|$, то $\lambda = 1$, и по формулам (5) получаем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат.

Пример. Даны точки $M_1(1; 1)$ и $M_2(7; 4)$. Найти точку $M(x; y)$, которая в два раза ближе к M_1 , чем к M_2 .

Решение. Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = 1/2$. Применяя формулы (5), находим координаты этой точки: $x = 3$, $y = 2$.

§ 3. Полярные координаты

Наиболее важной после прямоугольной системы координат является полярная система координат. Она состоит из некоторой точки O , называемой *полюсом*, и исходящего из нее луча OE — *полярной оси*. Кроме того, задается единица масштаба для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть M — произвольная точка плоскости. Пусть ρ — расстояние точки M от точки O ; φ — угол, на который нужно повернуть полярную ось для совмещения с лучом OM (рис. 13).

Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ . При этом число ρ считается первой координатой и называется *полярным радиусом*, число φ — второй координатой и называется *полярным углом*.

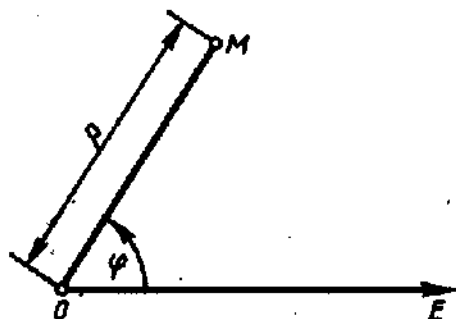


Рис. 13

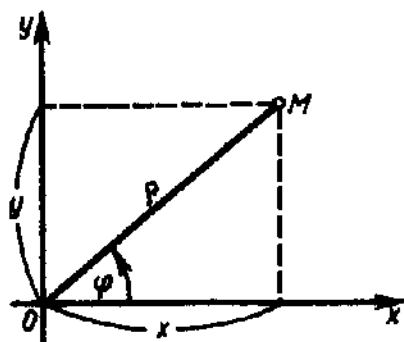


Рис. 14

Точка M с полярными координатами ρ и φ обозначается так: $M(\rho; \varphi)$. Очевидно, полярный радиус может иметь любое неотрицательное значение: $0 \leq \rho < +\infty$. Обычно считают, что полярный угол изменяется в следующих пределах: $0 \leq \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев приходится рассматривать углы, большие 2π , а также отрицательные углы, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке.

Установим связь между полярными координатами точки и ее прямоугольными координатами. При этом будем предполагать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Пусть точка M имеет прямоугольные координаты x и y и полярные координаты ρ и φ (рис. 14). Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi. \quad (1)$$

Формулы (1) выражают прямоугольные координаты через полярные. Выражения полярных координат через прямоугольные следуют из формул (1):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = y/x. \quad (2)$$

Заметим, что формула $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ определяет два значения полярного угла φ , так как φ изменяется от 0 до 2π . Из этих двух зна-

чений угла φ выбирают то, при котором удовлетворяются равенства (1).

Пример. Даны прямоугольные координаты точки: (2; 2). Найти ее полярные координаты, считая, что полюс совмещен с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.

Решение. По формулам (2) имеем

$$\rho = 2\sqrt{2}, \operatorname{tg} \varphi = 1.$$

Согласно второму из этих равенств $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$. Но так как $x = 2 > 0$ и $y = 2 > 0$, то нужно взять $\varphi = \pi/4$.

§ 4. Преобразование прямоугольных координат

При решении многих задач аналитической геометрии наряду с данной прямоугольной системой координат приходится вводить и другие прямоугольные системы координат. При этом, естественно, изменяются как координаты точек, так и уравнения кривых. Возникает задача: как, зная координаты точки в одной системе координат, найти координаты этой же точки в другой системе координат. Решить эту задачу позволяют формулы преобразования координат.

Рассмотрим два вида преобразований прямоугольных координат:

- 1) *параллельный сдвиг осей*, когда изменяется положение начала координат, а направления осей остаются прежними;
- 2) *поворот осей координат*, когда обе оси поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол, а начало координат не изменяется.

1. Параллельный сдвиг осей. Пусть точка M плоскости имеет координаты $(x; y)$ в прямоугольной системе координат Oxy . Перенесем начало координат в точку $O'(a; b)$, где a и b — координаты нового начала в старой системе координат Oxy . Новые оси координат $O'x'$ и $O'y'$ выберем сонаправленными со старыми осями Ox и Oy . Обозначим координаты точки M в системе $O'x'y'$ (новые координаты) через $(x'; y')$. Выведем формулы, выражающие связь между новыми и старыми координатами точки M . Для этого проведем перпендикуляры $MM_x \perp Ox$, $MM_y \perp Oy$, $O'O'_x \perp Ox$, $O'O'_y \perp Oy$ и введем обозначения M_x и M_y для точек пересечения прямых MM_x и MM_y соответственно с осями $O'x'$ и $O'y'$ (рис. 15). Тогда, используя основное тождество (гл. 1, § 3), получаем

$$\begin{aligned}x &= OM_x = OO'_x + O'_xM_x = OO'_x + O'M_x = a + x', \\y &= OM_y = OO'_y + O'_yM_y = OO'_y + O'M_y = b + y'.\end{aligned}$$

Итак,

$$x = x' + a, y = y' + b \quad (1)$$

или

$$x' = x - a, y' = y - b. \quad (2)$$

Это и есть искомые формулы.

2. Поворот осей координат. Повернем систему координат Oxy вокруг начала координат O на угол α в положение $Ox'y'$ (рис. 16).

Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$ в старой системе координат Oxy и координаты $(x'; y')$ в новой системе координат $Ox'y'$. Выведем формулы, устанавливающие связь между старыми и новыми координатами точки M . Для этого обозначим через $(\rho; \theta)$ полярные координаты точки M , считая полярной осью положительную полуось Ox , а через $(\rho; \theta')$ — полярные координаты той же точки M , считая полярной осью положительную полуось Ox' .

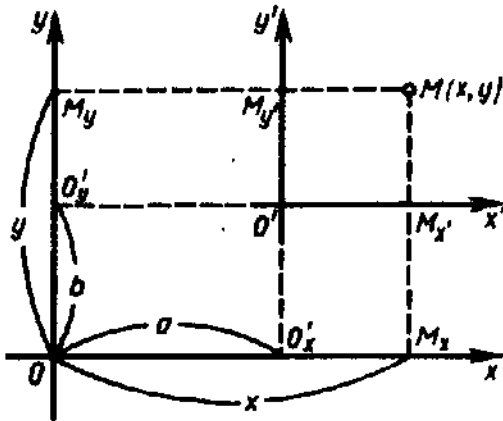


Рис. 15

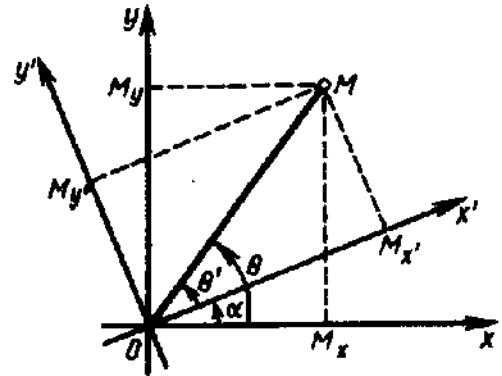


Рис. 16

Очевидно, в каждом случае $\rho = |OM|$, а $\theta = \theta' + \alpha$. Далее, согласно формулам (1) из § 3

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

и аналогично

$$x' = \rho \cos \theta', \quad y' = \rho \sin \theta'.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta = \rho \cos (\theta' + \alpha) = \rho (\cos \theta' \cos \alpha - \sin \theta' \sin \alpha) = \\ &= \rho \cos \theta' \cos \alpha - \rho \sin \theta' \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \\ y &= \rho \sin \theta = \rho \sin (\theta' + \alpha) = \rho (\cos \theta' \sin \alpha + \sin \theta' \cos \alpha) = \\ &= \rho \cos \theta' \sin \alpha + \rho \sin \theta' \cos \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Выражая из этих равенств x' и y' через x и y , получим

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Пример. Определить координаты точки $M(3; 5)$ в новой системе координат $O'x'y'$, начало O' которой находится в точке $(-2; 1)$, а оси параллельны осям старой системы координат Oxy .

Решение. По формуле (2) имеем

$$x' = 3 + 2 = 5, \quad y' = 5 - 1 = 4,$$

т. е. в новой системе координат точка M имеет координаты $(5; 4)$.

§ 5. Уравнение линии на плоскости

Рассмотрим соотношение вида

$$F(x; y) = 0, \quad (1)$$

связывающее переменные величины x и y . Равенство (1) будем называть *уравнением с двумя переменными x, y* , если это равенство справедливо не для всех пар чисел x и y .

Примеры уравнений: $2x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $\sin x + \sin y - 1 = 0$.

Если равенство (1) справедливо для всех пар чисел x и y , то оно называется *тождеством*.

Примеры тождеств: $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$.

Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие *уравнения линии*. Пусть на плоскости заданы прямоугольная система координат и некоторая линия L (рис. 17).

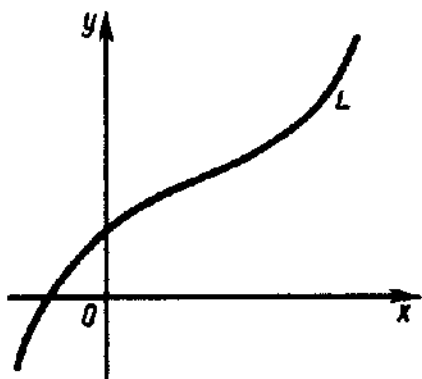


Рис. 17

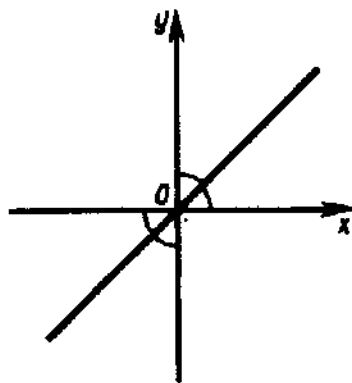


Рис. 18

Определение. Уравнение (1) называется *уравнением линии L* (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L , и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Из определения следует, что линия L представляет собой множество всех тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1). Будем говорить, что уравнение (1) определяет (или задает) линию L .

Понятие уравнения линии дает возможность решать геометрические задачи алгебраическими методами. Например, задача нахождения точки пересечения двух линий, определяемых уравнениями $x + y = 0$ и $x^2 + y^2 = 1$, сводится к алгебраической задаче решения системы этих уравнений.

Линия L может определяться уравнением вида

$$F(\rho; \varphi) = 0,$$

где $(\rho; \varphi)$ — полярные координаты точки.

Рассмотрим примеры уравнений линий.

1) $x - y = 0$. Записав это уравнение в виде $y = x$, заключаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой биссектрисы I и III координатных углов. Это и есть линия, определенная уравнением $x - y = 0$ (рис. 18).

2) $x^2 - y^2 = 0$. Представив уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 0$, заключаем, что множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, — это две прямые, содержащие биссектрисы четырех координатных углов (рис. 19).

3) $x^2 + y^2 = 0$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, состоит из одной точки $(0; 0)$. В данном случае уравнение определяет, как говорят, вырожденную линию.

4) $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Так как при любых x и y числа x^2 и y^2 неотрицательны, то $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Значит, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, т. е. никакого геометрического образа на плоскости данное уравнение не определяет.

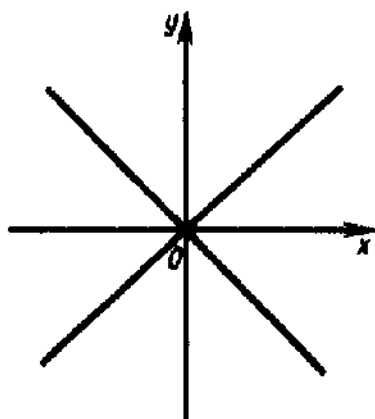


Рис. 19

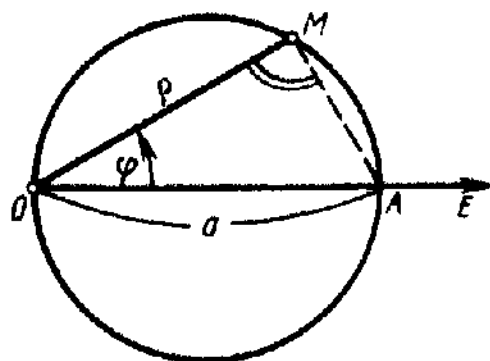


Рис. 20

5) $\rho = a \cos \varphi$, где a — положительное число, переменные ρ и φ — полярные координаты. Обозначим через M точку с полярными координатами $(\rho; \varphi)$, через A — точку с полярными координатами $(a; 0)$ (рис. 20). Если $\rho = a \cos \varphi$, где $0 < \varphi < \pi/2$, то угол OMA — прямой, и обратно. Следовательно, множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют данному уравнению, это окружность с диаметром OA .

6) $\rho = a\varphi$, где a — положительное число; ρ и φ — полярные координаты. Обозначим через M точку с полярными координатами $(\rho; \varphi)$. Если $\varphi = 0$, то и $\rho = 0$. Если φ возрастает, начиная от нуля, то ρ возрастает пропорционально φ . Точка $M(\rho; \varphi)$, таким образом, исходя из полюса, движется вокруг него с ростом φ , одновременно удаляясь от него. Множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $\rho = a\varphi$, называется *спиралью Архимеда* (рис. 21). При этом предполагается, что φ может принимать любые неотрицательные значения.

Если точка M совершает один полный оборот вокруг полюса, то φ возрастает на 2π , а ρ — на $2a\pi$, т. е. спираль пересекает любую

прямую, проходящую через полюс, на равные отрезки (не считая отрезка, содержащего полюс), которые имеют длину $2a\pi$.

В приведенных примерах по заданному уравнению линии исследованы ее свойства и тем самым установлено, что представляет собой эта линия.

Рассмотрим теперь обратную задачу: для заданного какими-то свойствами множества точек, т. е. для заданной линии L , найти ее уравнение.

Пример. Вывести уравнение (в заданной прямоугольной системе координат) множества точек, каждая из которых отстоит от точки

$C(\alpha; \beta)$ на расстоянии R . Иными словами, вывести уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(\alpha; \beta)$ (рис. 22).

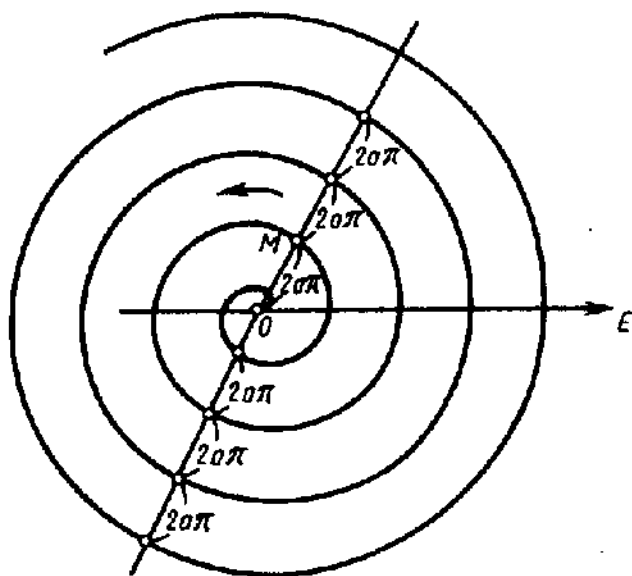


Рис. 21

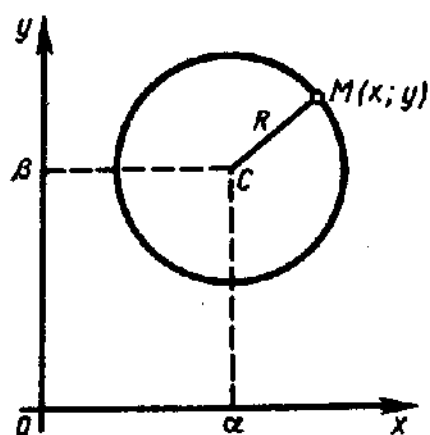


Рис. 22

Решение. Расстояние от произвольной точки $M(x; y)$ до точки C вычисляется по формуле $|MC| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$. Если точка M лежит на окружности, то $|MC| = R$ или $MC^2 = R^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \quad (2)$$

Если же точка $M(x; y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq R^2$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2). Таким образом, искомое уравнение окружности имеет вид (2). Полагая в (2) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, получаем уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

§ 6. Линии первого порядка

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть дана некоторая прямая. Назовем *углом наклона* данной прямой к оси Ox угол α , на который нужно повернуть ось Ox , чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой. Угол α может иметь различные значения, которые отличаются друг от друга на величину $\pm n\pi$, где n — натуральное число. Чаше

всего в качестве угла наклона берут наименьшее неотрицательное значение угла α , на который нужно повернуть (против часовой стрелки) ось Ox , чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой (рис. 23). В таком случае $0 \leq \alpha < \pi$.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом* этой прямой и обозначается буквой k :

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Из формулы (1), в частности, следует, что если $\alpha = 0$, т. е. прямая параллельна оси Ox , то $k = 0$. Если $\alpha = \pi/2$, т. е. прямая перпендикулярна оси Ox , то $k = \operatorname{tg} \alpha$ теряет смысл. В таком случае говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность».

Выведем уравнение данной прямой, если известны ее угловой коэффициент k и величина b отрезка OB^* , который она отсекает на оси Oy (рис. 23) (т. е. данная прямая не перпендикулярна оси Ox).

Обозначим через M произвольную точку плоскости с координатами x и y . Если провести прямые BN и NM , параллельные осям, то в случае $k \neq 0$ образуется прямоугольный треугольник BNM . Точка M лежит на прямой тогда и только тогда, когда величины NM и BN удовлетворяют условию

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg} \alpha,$$

но $NM = CM - CN = CM - OB = y - b$, $BN = x$. Отсюда, учитывая формулу (1), получаем, что точка $M(x; y)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{y - b}{x} = k. \quad (2)$$

Уравнение (2) после преобразования принимает вид

$$y = kx + b. \quad (3)$$

Уравнение (3) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox , и ее уравнение имеет вид $y = b$.

Итак, любая прямая, не перпендикулярная оси Ox , имеет уравнение вида (3). Очевидно, верно и обратное: любое уравнение вида (3) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок величины b .

Пример. Построить прямую, заданную уравнением

$$y = (3/4)x + 2.$$

Решение. Отложим на оси Oy отрезок OB , величина которого равна 2 (рис. 24); проведем через точку B параллельно оси Ox

* Более того, b является величиной направленного отрезка $\overline{OB}$ на оси Oy . Однако для краткости будем говорить просто «величина отрезка OB ».

отрезок, величина которого $BN=4$, и через точку N параллельно оси Oy отрезок, величина которого $NM=3$. Затем проведем прямую BM , которая и является искомой. Она имеет угловой коэффициент $k=3/4$ и отсекает на оси Oy отрезок величины $b=2$.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом. В ряде случаев возникает необходимость составить уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1; y_1)$ и угловой коэффициент k . Запишем уравнение прямой в виде (3), где b — пока неизвестное число. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (3): $y_1 = kx_1 + b$. Определяя b из этого равенства и подставляя в уравнение (3), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Если прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно оси Ox , т. е. ее угловой коэффициент обращается в бесконечность, то уравнение прямой имеет вид $x - x_1 = 0$. Формально это уравнение можно получить из (4), если разделить уравнение (4) на k и затем устремить k к бесконечности.

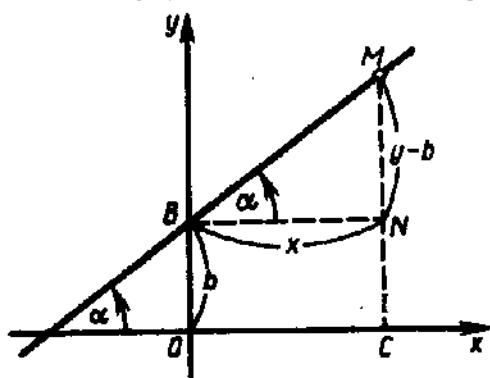


Рис. 23

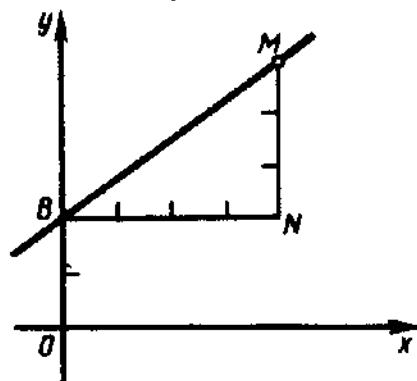


Рис. 24

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 25). Запишем уравнение прямой M_1M_2 в виде (4), где k — пока неизвестный угловой коэффициент. Так как прямая M_1M_2 проходит через точку M_2 , то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (4): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Определяя k из этого равенства (при условии $x_1 \neq x_2$) и подставляя в уравнение (4), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Это уравнение, если $y_1 \neq y_2$, можно записать в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (5)$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. В этом случае прямая параллельна оси Ox . Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2 , параллельна оси Oy , и ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 1)$ и $M_2(5; 4)$.

Решение. Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в соотношение (5), получаем искомое уравнение прямой:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3}, \text{ или } 3x - 2y - 7 = 0.$$

4. Угол между двумя прямыми. Рассмотрим две прямые L_1 и L_2 . Пусть уравнение L_1 имеет вид $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, а уравнение L_2 — вид $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ (рис. 26). Пусть φ — угол между прямыми L_1 и L_2 : $0 \leq \varphi < \pi$.

Из геометрических соображений устанавливаем зависимость между углами α_1 , α_2 , φ : $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}, \text{ или} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Формула (6) определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi - \varphi$.

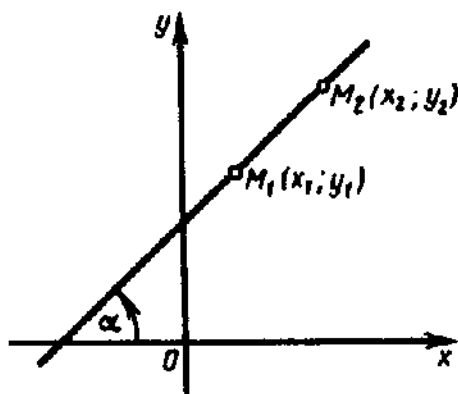


Рис. 25

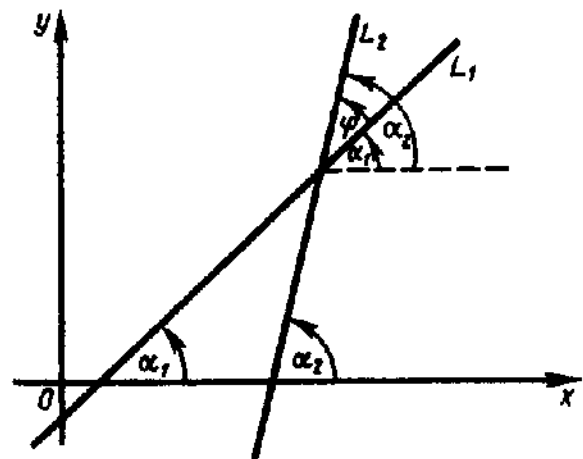


Рис. 26

Пример. Две прямые заданы уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Очевидно, $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, поэтому по формуле (6) находим

$$\operatorname{tg} \varphi = (-3 - 2)/(1 + (-3) \cdot 2) = -5/-5 = 1.$$

Таким образом, один из углов между данными прямыми равен $\pi/4$, другой угол $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

5. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg} \varphi = 0$. В этом случае числитель в правой части формулы (6) равен нулю: $k_2 - k_1 = 0$, откуда

$$k_2 = k_1.$$

Таким образом, *условие параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.*

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, т. е. $\varphi = \pi/2$, то $\alpha_2 = \pi/2 + \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} (\pi/2 + \alpha_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -1/(\operatorname{tg} \alpha_1)$, т. е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Таким образом, *условие перпендикулярности двух прямых состоит в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.* Это условие можно формально получить из формулы (6), если приравнять нулю знаменатель в правой части (6), что соответствует обращению $\operatorname{tg} \varphi$ в бесконечность, т. е. равенству $\varphi = \pi/2$.

6. Общее уравнение прямой. Теорема 3.4. *В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени*

$$Ax + By + C = 0, \quad (7)$$

и обратно, уравнение (7) при произвольных коэффициентах A, B, C (A и B не равны нулю одновременно) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат Ox, Oy .

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси Ox , то, как было показано в п. 1, она имеет уравнение $y = kx + b$, т. е. уравнение вида (7), где $A = k$, $B = -1$ и $C = b$. Если прямая перпендикулярна оси Ox , то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине a отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. 27). Уравнение этой прямой имеет вид $x = a$, т. е. также является уравнением первой степени вида (7), где $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Тем самым первое утверждение доказано. Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (7), причем хотя бы один из коэффициентов A и B не равен нулю.

Если $B \neq 0$, то (7) можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагая $k = -A/B$, $b = -C/B$, получаем уравнение $y = kx + b$, т. е. уравнение вида (3), которое определяет прямую.

Если $B = 0$, то $A \neq 0$ и (7) принимает вид $x = -C/A$. Обозначая $-C/A$ через a , получаем $x = a$, т. е. уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox . ■

Линии, определяемые в прямоугольной системе координат уравнением первой степени, называются *линиями первого порядка*. Таким образом, каждая прямая есть линия первого порядка и, наоборот, каждая линия первого порядка есть прямая.

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой*. Оно содержит уравнение любой прямой при соответствующем выборе коэффициентов A, B, C .

7. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках». Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax + By + C = 0$ является *неполным*, т. е. какой-то из коэффициентов равен нулю.

1) $C = 0$; уравнение имеет вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $B = 0$ ($A \neq 0$); уравнение имеет вид $Ax + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy . Как было показано в теореме 3.4, это уравнение приводится к виду $x = a$, где $a = -C/A$, a — величина отрезка, который отсекает прямая на оси Ox (рис. 27). В частности, если $a = 0$, то прямая совпадает с осью Oy . Таким образом, уравнение $x = 0$ определяет ось ординат.

3) $A = 0$ ($B \neq 0$); уравнение имеет вид $By + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Ox . Этот факт устанавливается аналогично предыдущему случаю. Если положить $-C/B = b$, то уравнение принимает вид $y = b$, где b — величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy (рис. 28). В частности, если $b = 0$, то прямая совпадает с осью Ox . Таким образом, уравнение $y = 0$ определяет ось абсцисс.

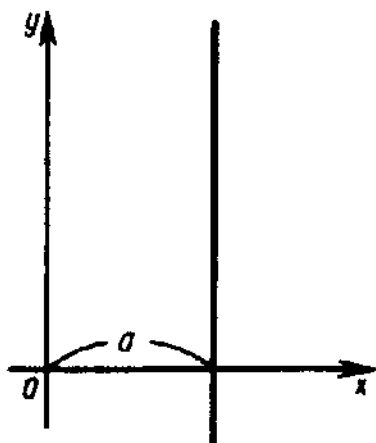


Рис. 27

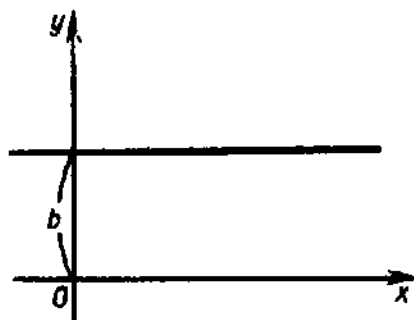


Рис. 28

Пусть теперь дано уравнение $Ax + By + C = 0$ при условии, что ни один из коэффициентов A , B , C не равен нулю. Преобразуем его к виду

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Вводя обозначения $a = -C/A$, $b = -C/B$, получаем

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (8)$$

Уравнение (8) называется *уравнением прямой «в отрезках»*. Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Эта форма уравнения прямой удобна для геометрического построения прямой.

Пример. Прямая задана уравнением $3x - 5y + 15 = 0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую.

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат Ox и Oy отрезки, величины которых соответственно равны $a = -5$, $b = 3$, и проведем прямую через точки $M_1(-5; 0)$ и $M_2(0; 3)$ (рис. 29).

8. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Пусть дана некоторая прямая L . Проведем через начало координат прямую n , перпендикулярную данной, и назовем ее *нормалью* к прямой L . Буквой N отметим точку, в которой нормаль пересекает прямую L (рис. 30, а). На нормали введем направление от точки O к точке N . Таким образом, нормаль станет осью. Если точки N и O совпадают, то в качестве направления нормали возьмем любое из двух возможных.

Обозначим через α угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox до совмещения ее положительного направления с направлением нормали, через ρ — длину отрезка ON .

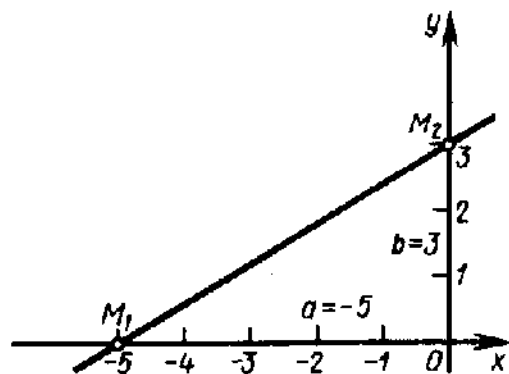
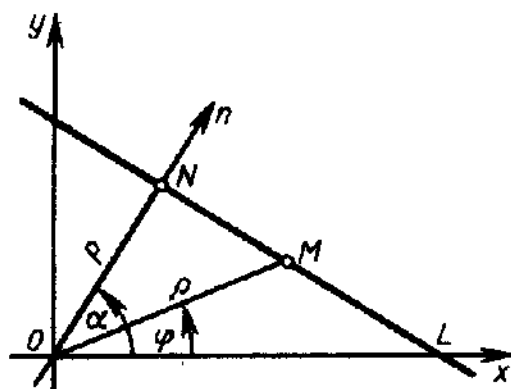


Рис. 29



а)

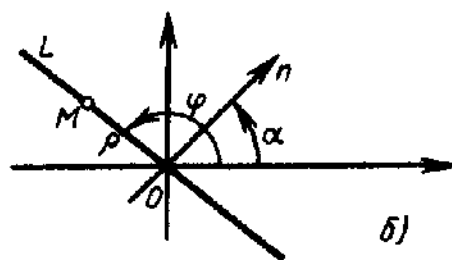


Рис. 30

Тем самым, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $\rho \geq 0$. Выведем уравнение данной прямой, считая известными числа α и ρ . Для этого возьмем на прямой произвольную точку M с полярными координатами $(\rho; \varphi)$, где O — полюс, Ox — полярная ось. Если точки O и N не совпадают, то из прямоугольного треугольника ONM имеем

$$\rho = \rho \cos(\alpha - \varphi) = \rho(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\rho \cos \varphi \cos \alpha + \rho \sin \varphi \sin \alpha - \rho = 0. \quad (9)$$

Так как точки, не лежащие на данной прямой L , не удовлетворяют уравнению (9), то (9) — уравнение прямой L в полярных

координатах. По формулам, связывающим прямоугольные координаты с полярными, имеем: $\rho \cos \varphi = x$, $\rho \sin \varphi = y$. Следовательно, уравнение (9) в прямоугольной системе координат принимает вид

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0. \quad (10)$$

Если точки O и N совпадают, то прямая L проходит через начало координат (рис. 30, б) и $\rho = 0$. В этом случае, очевидно, для любой точки M прямой L выполняется равенство $\cos(\varphi - \alpha) = 0$. Умножая его на ρ , получаем $\rho \cos(\varphi - \alpha) = 0$, откуда $\rho \cos \varphi \cos \alpha + \rho \sin \varphi \sin \alpha = 0$

или

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0.$$

Таким образом, и в этом случае уравнение прямой можно представить в виде (10).

Уравнение (10) называется *нормальным уравнением* прямой L .

С помощью нормального уравнения прямой можно определить расстояние от данной точки плоскости до прямой.

Пусть L — прямая, заданная нормальным уравнением: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0$, и пусть $M_0(x_0; y_0)$ — точка, не лежащая на этой прямой. Требуется определить расстояние d от точки M_0 до прямой L .

Через точку M_0 проведем прямую L_0 параллельно прямой L . Пусть N_0 — точка пересечения L_0 с нормалью, ρ_0 — длина отрезка ON_0 (рис. 31).

Если точки N и N_0 лежат по одну сторону от точки O , то нормальное уравнение прямой L_0 имеет вид $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho_0 = 0$. Так как точка $M_0(x_0; y_0) \in L_0$, то $x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho_0 = 0$, откуда $\rho_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$. В этом случае

$$d = |\rho_0 - \rho| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho|.$$

Если же точки N и N_0 лежат по разные стороны от точки O , то нормальное уравнение прямой L_0 имеет вид $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \rho_0 = 0$, где α_1 отличается от α на π . Следовательно, $\rho_0 = x_0 \cos \alpha_1 + y_0 \sin \alpha_1 = -x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha$. В этом случае

$$d = |\rho_0 + \rho| = |-x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha + \rho| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho|.$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев получаем формулу

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho|. \quad (11)$$

Отметим, что формула (11) пригодна и в том случае, когда точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на прямой L , т. е. ее координаты удовлетворяют

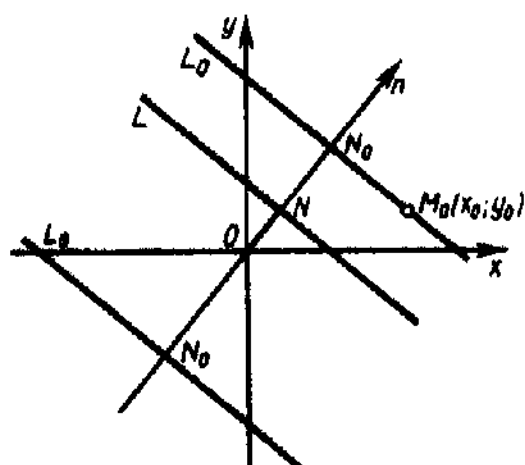


Рис. 31

уравнению прямой $L: x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p = 0$. В этом случае по формуле (11) получаем $d=0$. Из формулы (11) следует, что для вычисления расстояния d от точки M_0 до прямой L нужно в левую часть нормального уравнения прямой L поставить вместо $(x; y)$ координаты точки M_0 и полученное число взять по модулю.

Теперь покажем, как привести общее уравнение прямой к нормальному виду. Пусть

$$Ax + By + C = 0 \quad (12)$$

— общее уравнение некоторой прямой, а

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (13)$$

— ее нормальное уравнение.

Так как уравнения (12) и (13) определяют одну и ту же прямую, то их коэффициенты пропорциональны. Умножая все члены уравнения (12) на произвольный множитель $\mu \neq 0$, получаем уравнение

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0.$$

При соответствующем выборе μ полученное уравнение обращается в уравнение (13), т. е. выполняются равенства

$$\mu A = \cos \alpha, \mu B = \sin \alpha, \mu C = -p. \quad (14)$$

Чтобы найти множитель μ , возведем первые два из этих равенств в квадрат и сложим, тогда получаем

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Отсюда

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (15)$$

Число μ называется *нормирующим множителем*. Знак нормирующего множителя определяется с помощью третьего из равенств (14). Согласно этому равенству μC число отрицательное, если $C \neq 0$. Следовательно, в формуле (15) берется знак, противоположный знаку C . Если $C=0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать произвольно.

Итак, для приведения общего уравнения прямой к нормальному виду надо найти значение нормирующего множителя μ , а затем все члены уравнения умножить на μ .

Пример. Даны прямая $3x - 4y + 10 = 0$ и точка $M(4; 3)$. Найти расстояние d от точки M до данной прямой.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду. Для этого найдем по формуле (15) нормирующий множитель:

$$\mu = -1/\sqrt{3^2 + 4^2} = -1/5.$$

Умножая данное уравнение на μ , получаем нормальное уравнение

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

По формуле (11) находим искомое расстояние:

$$d = |(-3/5) \cdot 4 + (4/5) \cdot 3 - 2| = |-2| = 2.$$

§ 7. Линии второго порядка

Рассмотрим три вида линий: эллипс, гиперболу и параболу, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени. Такие линии называются *линиями второго порядка*.

1. Эллипс. Определение. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

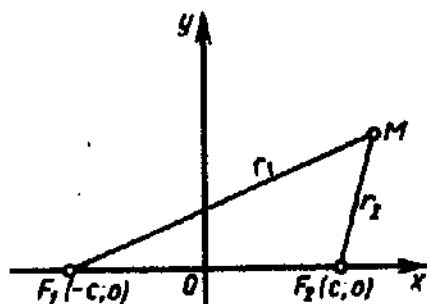


Рис. 32

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 , расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами через $2c$, сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов через $2a$. По определению, $2a > 2c$ или $a > c$.

Для вывода уравнения эллипса введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси абсцисс, а начало координат делило отрезок F_1F_2 пополам. Тогда фокусы имеют координаты: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (рис. 32). Выведем уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до фокусов ($r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$). Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M . Из определения эллипса следует, что точка $M(x; y)$ будет лежать на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (1)$$

По формуле (1) из § 2 находим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (2)$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3)$$

Уравнение (3) и есть искомое уравнение эллипса. Однако для практического использования оно неудобно, поэтому уравнение эллипса обычно приводят к более простому виду. Перенесем второй радикал в правую часть уравнения, а затем возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \text{ или} \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (4)$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Отсюда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad (6)$$

геометрический смысл которой раскрыт далее. Так как по условию $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ и, следовательно, b — число положительное. Из равенства (6) имеем

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Поэтому уравнение (5) можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2 , окончательно получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Так как уравнение (7) получено из уравнения (3), то координаты любой точки эллипса, удовлетворяющие уравнению (3), будут удовлетворять и уравнению (7). Однако при упрощении уравнения (3) обе его части дважды были возведены в квадрат и могли появиться «лишние» корни, вследствие чего уравнение (7) могло оказаться неравносильным уравнению (3). Убедимся в том, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют и уравнению (3), т. е. уравнения (3) и (7) равносильны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что величины r_1 и r_2 для любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), удовлетворяют соотношению (1). Действительно, пусть координаты x и y некоторой точки удовлетворяют уравнению (7). Тогда, подставляя в выражение (2) значение $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$, полученное из (7), после несложных преобразований найдем, что $r_1 = \sqrt{(a + cx/a)^2}$. Так как $|x| \leq a$ [это следует из (7)] и $c/a < 1$, то $a + cx/a > 0$, и поэтому $r_1 = a + cx/a$.

Аналогично найдем, что $r_2 = a - cx/a$. Складывая почленно эти равенства, получаем соотношение (1), что и требовалось установить. Таким образом, любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (7), принадлежит эллипсу, и наоборот, т. е. уравнение (7) есть уравнение эллипса. Уравнение (7) называется *каноническим* (или *простейшим*) *уравнением эллипса*. Таким образом, эллипс — линия второго порядка.

Исследуем теперь форму эллипса по его каноническому уравнению (7). Заметим, что уравнение (7) содержит только члены с четными степенями координат x и y , поэтому эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy , а также относительно начала координат. Таким образом, можно знать форму всего эллипса, если уста-

новить вид той его части, которая лежит в I координатном угле. Для этой части $y \geq 0$, поэтому, разрешая уравнение (7) относительно y , получаем

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (8)$$

Из равенства (8) вытекают следующие утверждения.

- 1) Если $x=0$, то $y=b$. Следовательно, точка $(0; b)$ лежит на эллипсе. Обозначим ее через B .
- 2) При возрастании x от 0 до a y уменьшается.
- 3) Если $x=a$, то $y=0$. Следовательно, точка $(a; 0)$ лежит на эллипсе. Обозначим ее через A .
- 4) При $x > a$ получаем мнимые значения y . Следовательно, точек эллипса, у которых $x > a$, не существует.

Итак, частью эллипса, расположенной в I координатном угле, является дуга BA^* (рис. 33).

Произведя симметрию относительно координатных осей, получим весь эллипс.

З а м е ч а н и е. Если $a=b$, то уравнение (7) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$. Это уравнение окружности радиуса a . Таким обра-

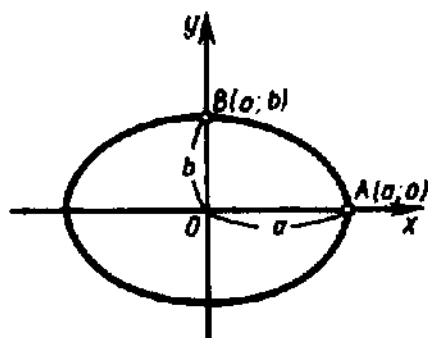


Рис. 33

зом, окружность — частный случай эллипса. Заметим, что эллипс можно получить из окружности радиуса a , если сжать ее в a/b раз вдоль оси Oy . При таком сжатии точка $(x; y)$ перейдет в точку $(x; y_1)$, где $y_1 = y(b/a)$. Подставляя $y = y_1(a/b)$ в уравнение окружности, получаем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Оси симметрии эллипса называются его *осями*, а центр симметрии (точка пересечения осей) — *центром эллипса*. Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются его *вершинами*. Вершины ограничивают на осях отрезки, равные $2a$ и $2b$. Из равенства (6) следует, что $a \geq b$. Величины a и b называются соответственно *большой* и *малой полуосями* эллипса. В соответствии с этим оси эллипса называются *большой* и *малой осями*.

Введем еще одну величину, характеризующую форму эллипса.

Определение. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение $\frac{c}{a}$, где c — половина расстояния между фокусами, a — большая полуось эллипса.*

Эксцентриситет обычно обозначают буквой e : $e = \frac{c}{a}$. Так как $c < a$, то $0 \leq e < 1$, т. е. эксцентриситет эллипса меньше еди-

* В гл. 6 будет введено понятие направления выпуклости графика функции $y = f(x)$ и показано, что дуга BA направлена выпуклостью вверх.

ницы. Принимая во внимание, что $c^2 = a^2 - b^2$, найдем

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Из последнего равенства легко получается геометрическое истолкование эксцентриситета эллипса. При очень малом e числа a и b почти равны, т. е. эллипс близок к окружности. Если же e близко к единице, то число b весьма мало по сравнению с числом a и эллипс сильно вытянут вдоль большой оси. Таким образом, эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.

Как известно, планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим траекториям. Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных — велики, т. е. близки к единице. Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы то приближаются к Солнцу (Солнце находится в одном из фокусов), то значительно удаляются от него.

2. Гипербола. Определение. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

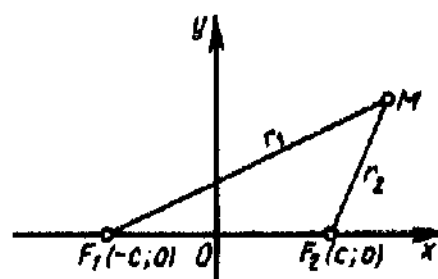


Рис. 34

Обозначим фокусы гиперболы через F_1 и F_2 , расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами через $2c$, а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению, $2a < 2c$ или $a < c$.

Для вывода уравнения гиперболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы гиперболы лежали на оси абсцисс, а начало координат делило отрезок F_1F_2 пополам. Тогда фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (рис. 34). Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* точки M и обозначаются через r_1 и r_2 . Из определения гиперболы следует, что точка $M(x; y)$ будет лежать на данной гиперболе в том и только в том случае, когда $|r_1 - r_2| = 2a$. Отсюда

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \quad (9)$$

По формуле (1) из § 2 находим

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \quad (10)$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получаем

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (11)$$

Уравнение (11) и является искомым уравнением гиперболы. Упростим это уравнение аналогично тому, как было упрощено уравнение (3) для эллипса. Перенесем второй радикал в правую часть уравнения, после чего возведем обе части в квадрат. Получаем

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad \text{или} \\ cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (12)$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Отсюда

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (13)$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad (14)$$

геометрический смысл которой раскрыт далее. Так как $c > a$, то $c^2 - a^2 > 0$ и b — число положительное. Из равенства (14) имеем

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Уравнение (13) принимает вид

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (15)$$

Как и для эллипса, можно доказать равносильность уравнений (15) и (11). Уравнение (15) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению. Так как уравнение (15) содержит члены только с четными степенями координат x и y , то гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy , а также относительно начала координат. Поэтому достаточно рассмотреть только часть гиперболы, лежащую в I координатном угле. Для этой части $y \geq 0$, поэтому, разрешая уравнение (15) относительно y , получаем

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (16)$$

Из равенства (16) вытекают следующие утверждения.

1) Если $0 \leq x < a$, то y получает мнимые значения, т. е. точек гиперболы с абсциссами $0 \leq x < a$ нет.

2) Если $x = a$, то $y = 0$, т. е. точка $(a; 0)$ принадлежит гиперболе. Обозначим ее через A .

3) Если $x > a$, то $y > 0$, причем y возрастает при возрастании x и $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Переменная точка $M(x; y)$ на гиперболе движется с ростом x «вправо» и «вверх», ее начальное поло-

женне — точка $A(a; 0)$ (рис. 35). Уточним, как именно точка M «уходит в бесконечность».

Для этого кроме уравнения (16) рассмотрим уравнение

$$y = \frac{b}{a}x, \quad (17)$$

которое определяет прямую с угловым коэффициентом $k = b/a$, проходящую через начало координат. Часть этой прямой, расположенная в I координатном угле, изображена на рис. 35. Для ее построения можно использовать прямоугольный треугольник OAB с катетами $OA = a$ и $AB = b$.

Покажем, что точка M , уходя по гиперболе в бесконечность, неограниченно приближается к прямой (17), которая является асимптотой гиперболы.*

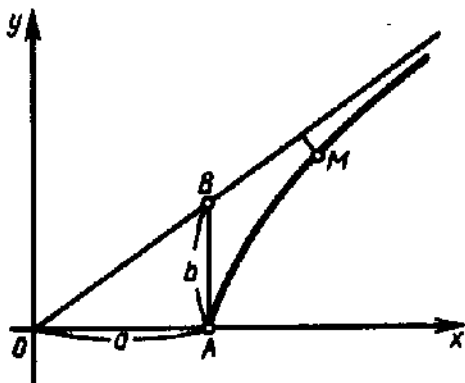


Рис. 35

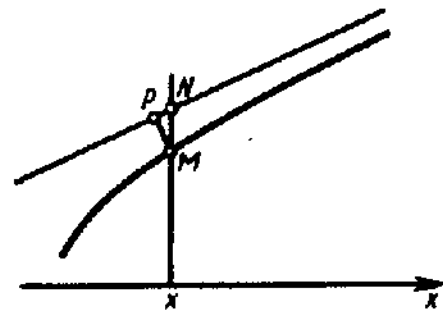


Рис. 36

Возьмем произвольное значение $x (x \geq a)$ и рассмотрим две точки $M(x; y)$ и $N(x; Y)$, где

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ и } Y = \frac{b}{a}x.$$

Точка M лежит на гиперболе, точка N — на прямой (17). Поскольку обе точки имеют одну и ту же абсциссу x , прямая MN перпендикулярна оси Ox (рис. 36). Найдем длину отрезка MN .

Прежде всего заметим, что при $x \geq a$

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Это означает, что при одной и той же абсциссе точка гиперболы лежит под соответствующей точкой асимптоты. Таким образом,

$$\begin{aligned} |MN| &= Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

* В гл. 6 будет дано определение асимптоты графика функций $y = f(x)$ и показано, что прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой гиперболы. Там же рассмотрен вопрос о направлении выпуклости гиперболы.

Из полученного выражения следует, что $|MN|$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, так как знаменатель стремится к $+\infty$, а числитель есть постоянная величина ab .

Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую (17). Тогда $|MP|$ — расстояние от точки M до этой прямой. Очевидно, $|MP| < |MN|$, а так как $|MN| \rightarrow 0$, то и подавно $|MP| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е. точка M неограниченно приближается к прямой (17), что и требовалось показать.

Вид всей гиперболы теперь можно легко установить, используя симметрию относительно координатных осей (рис. 37). Гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой) и имеет две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, первая из которых уже рассмотрена, а вторая представляет собой ее симметричное отражение относительно оси Ox (или оси Oy).

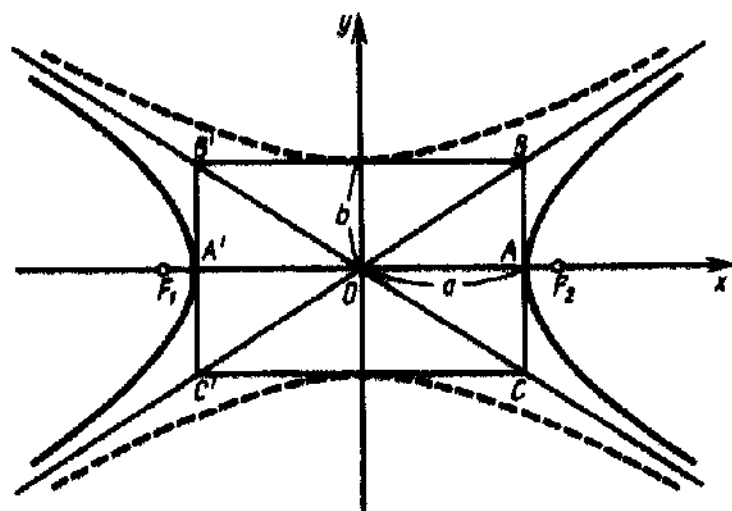


Рис. 37

Оси симметрии называются *осями* гиперболы, а центр симметрии (точка пересечения осей) — *центром* гиперболы. Одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются ее *вершинами* (они на рис. 37 обозначены буквами A' и A). Эта ось называется *действительной осью* гиперболы. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется *мнимой осью* гиперболы. Прямоугольник $BB'C'C$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 37) называется *основным прямоугольником* гиперболы. Величины a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

также определяет гиперболу. Она изображена на рис. 37 пунктирными линиями; вершины ее лежат на оси Oy . Эта гипербола называется *сопряженной* по отношению к гиперболе (15). Обе эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется *равносторонней* и ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Так как основным прямоугольником равносторонней гиперболы является квадратом, то асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг другу.

Определение. *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\frac{c}{a}$, где c — половина расстояния между фокусами, a — действительная полуось гиперболы.*

Эксцентриситет гиперболы (как и эллипса) обозначим буквой ε . Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$, т. е. эксцентриситет гиперболы больше единицы. Заметив, что $c^2 = a^2 + b^2$, найдем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Из последнего равенства легко получается геометрическое истолкование эксцентриситета гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше отношение b/a , а это означает, что основным прямоугольником более вытянут в направлении действительной оси. Таким образом, эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.

В случае равносторонней гиперболы ($a=b$) $\varepsilon = \sqrt{2}$.

3. Директрисы эллипса и гиперболы. Определение 1. *Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него, называются директрисами эллипса (здесь a — большая полуось, ε — эксцентриситет эллипса).*

Уравнения директрис эллипса, заданного каноническим уравнением (7), имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $a/\varepsilon > a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса, а левая — левее его левой вершины (рис. 38).

Определение 2. *Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него, называются директрисами гиперболы (здесь a — действительная полуось, ε — эксцентриситет гиперболы).*

Уравнения директрис гиперболы, заданной каноническим уравнением (15), имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon}$$

Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $a/\varepsilon < a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, а левая — между центром и левой вершиной (рис. 39).

С помощью понятий директрисы и эксцентриситета можно сформулировать общее свойство, присущее эллипсу и гиперболе. Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 3.5. Если r — расстояние от произвольной точки M эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса.

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе F_2 и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса (см. рис. 38). Расстояние

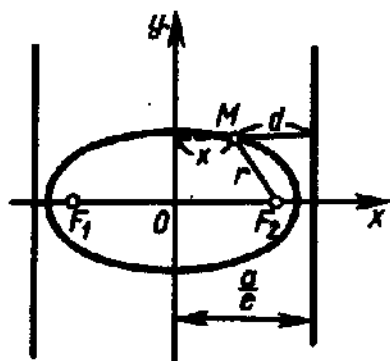


Рис. 38

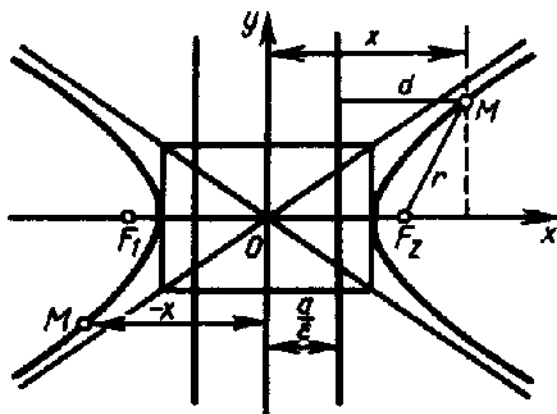


Рис. 39

от точки M до правой директрисы выражается равенством

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x, \quad (18)$$

которое легко устанавливается из рисунка. Из равенств (2) и (4) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = a - \varepsilon x. \quad (19)$$

Из соотношений (18) и (19) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 3.6. Если r — расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отноше-

ние r/d есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе F_2 и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы (рис. 39). Рассмотрим два случая.

1) Точка M находится на правой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки M до правой директрисы выражается равенством

$$d = x - \frac{a}{e}, \quad (20)$$

которое легко устанавливается из рисунка. Из равенств (10) и (12) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a.$$

Полагая $c/a = e$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = ex - a. \quad (21)$$

Из соотношений (20) и (21) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = \frac{(ex - a)e}{ex - a} = e.$$

2) Точка M находится на левой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки M до правой директрисы выражается равенством (рис. 39)

$$d = -x + \frac{a}{e}. \quad (22)$$

Аналогично (21), можно получить формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = -\left(\frac{c}{a}x - a\right) = -(ex - a). \quad (23)$$

Из соотношений (22) и (23) имеем

$$\frac{r}{d} = \frac{-(ex - a)}{-x + \frac{a}{e}} = \frac{(-ex + a)e}{(-ex + a)} = e. \blacksquare$$

Установленное свойство эллипса и гиперболы можно положить в основу общего определения этих линий: *множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соответствующей директрисы является величиной постоянной, равной e , есть эллипс, если $e < 1$, и гипербола, если $e > 1$.*

Естественно, возникает вопрос, что представляет собой множество точек, определенное аналогичным образом при условии $e = 1$. Оказывается, это новая линия второго порядка, называемая *параболой*.

4. Парабола. Определение. *Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.*

Для вывода уравнения параболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус перпендикулярно директрисе, и будем считать ее положительным направлением направление от директрисы к фокусу; начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. Выведем уравнение параболы в выбранной системе координат.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости. Обозначим через r расстояние от точки M до фокуса F ($r = |MF|$), через d — расстояние от точки M до директрисы, а через p — расстояние от фокуса до директрисы (рис. 40). Величину p называют *параметром* параболы, его геометрический смысл раскрыт далее. Точка M будет лежать на данной параболе в том и только в том случае, когда

$$r = d. \quad (24)$$

Фокус F имеет координаты $(p/2; 0)$; поэтому по формуле (1) из § 2 находим

$$r = |FM| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}. \quad (25)$$

Расстояние d , очевидно, выражается равенством (рис. 40)

$$d = |MQ| = x + \frac{p}{2}. \quad (26)$$

Отметим, что эта формула верна только для $x \geq 0$. Если же $x < 0$, то для точки $M(x; y)$, очевидно, $r > d$, и, следовательно, такая точка не лежит на параболе. Заменяя в равенстве (24) r и d их выражениями (25) и (26), найдем

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (27)$$

Это и есть искомое уравнение параболы. Приведем его к более удобному виду, для чего возведем обе части равенства (27) в квадрат. Получаем

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4, \text{ или} \\ y^2 = 2px. \quad (28)$$

Проверим, что уравнение (28), полученное после возведения в квадрат обеих частей уравнения (27), не приобрело «лишних» корней. Для этого достаточно показать, что для любой точки $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (28), выполнено соотношение (24). Действительно, из уравнения (28) вытекает, что $x \geq 0$, поэтому для точки $M(x; y)$ с неотрицательной абсциссой $d = p/2 + x$. Подставляя значение y^2 из (28) в выражение (25) для r и учитывая, что $x \geq 0$, получаем $r = p/2 + x$,

т. е. величины r и d равны, что и требовалось показать. Таким образом, уравнению (28) удовлетворяют координаты точек данной параболы и только они, т. е. уравнение (28) является уравнением данной параболы.

Уравнение (28) называется *каноническим уравнением параболы*. Это уравнение второй степени. Таким образом, парабола есть линия второго порядка.

Исследуем теперь форму параболы по ее уравнению (28). Так как уравнение (28) содержит y только в четной степени, то парабола симметрична относительно оси Ox . Следовательно, достаточно рассмотреть только ее часть, лежащую в верхней полуплоскости. Для этой части $y \geq 0$, поэтому разрешая уравнение (28) относительно y , получаем

$$y = \sqrt{2px}. \quad (29)$$

Из равенства (29) вытекают следующие утверждения.

1) Если $x < 0$, то уравнение (29) дает мнимые значения y . Следовательно, левее оси Oy ни одной точки параболы нет, что уже отмечалось ранее.

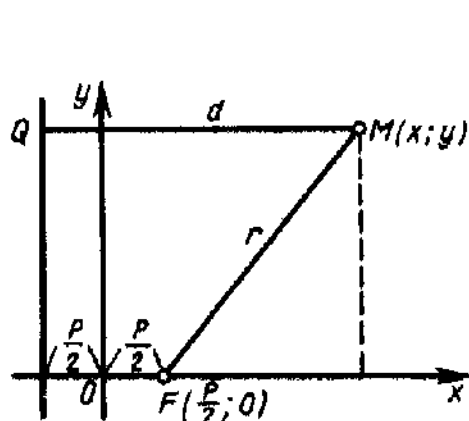


Рис. 40

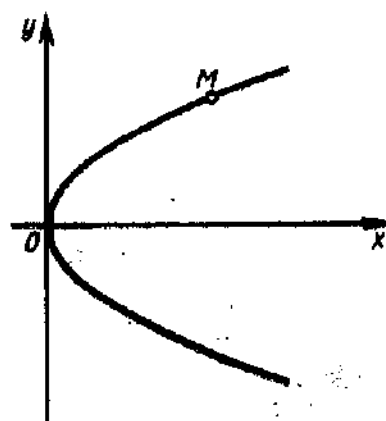


Рис. 41

2) Если $x = 0$, то $y = 0$. Таким образом, начало координат лежит на параболе и является самой «левой» ее точкой.

3) При возрастании x возрастает и y , причем если $x \rightarrow +\infty$, то и $y \rightarrow +\infty$.

Таким образом, переменная точка $M(x; y)$, перемещающаяся по параболе с ростом x , исходит из начала координат и движется «вправо» и «вверх», причем при $x \rightarrow +\infty$ удаление точки M как от оси Oy , так и от оси Ox является бесконечным.

Производя симметричное отражение рассмотренной части параболы относительно оси Ox , получим всю параболу (рис. 41), заданную уравнением (28).

Точка O называется *вершиной* параболы, ось симметрии (ось Ox) — *осью* параболы. Число p , т. е. параметр параболы, выражает расстояние от фокуса до директрисы. Выясним, как влияет параметр параболы на ее форму. Для этого возьмем какое-нибудь определенное значение абсциссы, например $x = 1$, и найдем из урав-

нения (28) соответствующие значения ординаты: $y = \pm \sqrt{2p}$. Получаем на параболе две точки $M_1(1; +\sqrt{2p})$ и $M_2(1; -\sqrt{2p})$ симметричные относительно ее оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Отсюда заключаем, что это расстояние тем больше, чем больше p . Следовательно, параметр p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой. В этом и состоит геометрический смысл параметра p .

Парабола, уравнение которой $y^2 = -2px$, $p > 0$, расположена слева от оси ординат (рис. 42, а). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox .

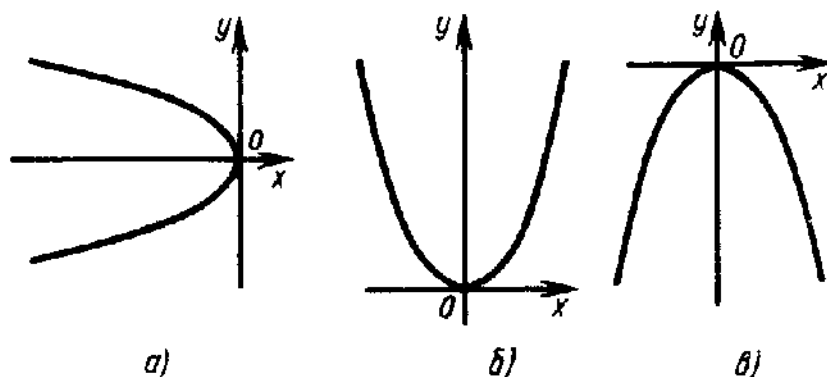


Рис. 42

Уравнение $x^2 = 2py$, $p > 0$, является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось Oy (рис. 42, б). Эта парабола лежит выше оси абсцисс. Уравнение $x^2 = -2py$, $p > 0$, определяет параболу, лежащую ниже оси Ox , с вершиной в начале координат (рис. 42, в).

§ 8. Общее уравнение линии второго порядка

Важной задачей аналитической геометрии является исследование общего уравнения линии второго порядка и приведение его к простейшим (каноническим) формам.

Общее уравнение линии второго порядка имеет следующий вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты A , $2B$, C , $2D$, $2E$ и F — любые числа и, кроме того, числа A , B и C не равны нулю одновременно, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

1. Приведение общего уравнения линии второго порядка к простейшему виду. Лемма 3.1. Пусть в прямоугольной системе координат Oxy задано уравнение (1) и пусть $AC - B^2 \neq 0$. Тогда с помощью параллельного сдвига и последующего поворота осей

* Для удобства преобразований уравнения (1) коэффициенты при xy , x и y обозначены соответственно через $2B$, $2D$ и $2E$.

координат уравнение (1) приводится к виду

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0, \quad (2)$$

где A', C', F' — некоторые числа; (x'', y'') — координаты точки в новой системе координат.

Доказательство. Пусть прямоугольная система координат $O'x'y'$ получена параллельным сдвигом осей Ox и Oy , причем начало координат перенесено в точку $O'(x_0, y_0)$. Тогда старые координаты (x, y) будут связаны с новыми (x', y') формулами

$$x = x' + x_0, y = y' + y_0$$

(см. формулы (1), § 4). В новых координатах уравнение (1) принимает вид

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \quad (3)$$

где

$$D' = Ax_0 + By_0 + D; E' = Bx_0 + Cy_0 + E;$$

$$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

В уравнении (3) коэффициенты D' и E' обращаются в нуль, если подобрать координаты точки (x_0, y_0) так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Так как $AC - B^2 \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение относительно x_0, y_0 .

Если пара чисел x_0, y_0 представляет собой решение системы (4), то уравнение (3) можно записать в виде

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \quad (5)$$

Пусть теперь прямоугольная система координат $O'x''y''$ получена поворотом системы $O'x'y'$ на угол α . Тогда координаты x', y' будут связаны с координатами x'', y'' формулами

$$x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha$$

(см. формулы (3), § 4). В системе координат $O'x''y''$ уравнение (5) принимает вид

$$A'x''^2 + 2B'x''y'' + C'y''^2 + F' = 0, \quad (6)$$

где

$$A' = A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha;$$

$$B' = -A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$C' = A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент B' в уравнении (6) обратился в нуль. Это требование приводит к уравнению $2B \cos 2\alpha = (A - C) \sin 2\alpha$ относительно α . Если $A = C$, то $\cos 2\alpha = 0$, и можно положить $\alpha = \pi/4$. Если же $A \neq C$, то выбираем $\alpha =$

$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C}$, и уравнение (6) принимает вид

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0,$$

т. е. получили уравнение (2). ■

З а м е ч а н и е. Уравнения (4) называются *уравнениями центра линии второго порядка*, а точка $(x_0; y_0)$, где x_0, y_0 — решение системы (4), называется *центром* этой линии. Заметим, что необходимым и достаточным условием существования единственного решения системы (4) является отличие от нуля числа $AC - B^2$, называемого определителем системы (см. гл. 10 § 2).

2. Инвариантность выражения $AC - B^2$. Классификация линий второго порядка. Коэффициенты A, B и C при старших членах уравнения (1) при параллельном переносе осей координат, как следует из доказательства леммы 3.1, не меняются, но они меняются при повороте осей координат. Однако выражение $AC - B^2$ остается неизменным как при переносе, так и при повороте осей, т. е. не зависит от преобразования координат. Действительно, при параллельном переносе этот факт очевиден [см. формулы (1) и (5)]; проверим его при повороте осей. Для этого воспользуемся выражениями для коэффициентов A', B' и C' уравнения (6). Имеем

$$\begin{aligned} A'C' - B'^2 &= (A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha) \times \\ &\times (A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha) - \\ &- [(C - A) \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)]^2. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$A'C' - B'^2 = AC(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - B^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 = AC - B^2,$$

что и требовалось показать.

Величина $AC - B^2$ называется *инвариантом* общего уравнения линии второго порядка. Она имеет важное значение в исследовании линий второго порядка.

В зависимости от знака величины $AC - B^2$ линии второго порядка разделяются на следующие три типа:

- 1) эллиптический, если $AC - B^2 > 0$;
- 2) гиперболический, если $AC - B^2 < 0$;
- 3) параболический, если $AC - B^2 = 0$.

Рассмотрим линии различных типов.

1) **Эллиптический тип.** Поскольку $AC - B^2 > 0$, согласно лемме 3.1, общее уравнение линии второго порядка может быть приведено к виду (для удобства записи опускаем штрихи у коэффициентов и координат)

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $A > 0, C > 0$ (случай $A < 0, C < 0$ сводится к случаю $A > 0, C > 0$ умножением уравнения на -1) и $F < 0$. Перенесем F в правую часть уравнения и разделим на него. Уравнение

принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 = -F/A$, $b^2 = -F/C$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением эллипса [см. формулу (7), § 7], заключаем, что оно является каноническим уравнением эллипса.

б) $A > 0$, $C > 0$ и $F > 0$. Тогда, аналогично предыдущему, уравнение можно привести к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости. Оно называется *уравнением мнимого эллипса*.

в) $A > 0$, $C > 0$, $F = 0$. Уравнение имеет вид ($a^2 = A$, $c^2 = C$):

$$a^2x^2 + c^2y^2 = 0.$$

Ему удовлетворяют координаты только одной точки $x = 0$, $y = 0$. Такое уравнение назовем *уравнением пары мнимых пересекающихся прямых*.

2) Гиперболический тип. Поскольку $AC - B^2 < 0$, согласно лемме 3.1 общее уравнение линий второго порядка приводится к виду

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $A > 0$, $C < 0$ (случай $A < 0$, $C > 0$ сводится к случаю $A > 0$, $C < 0$ умножением уравнения на -1) и $F \neq 0$. Пусть, например, $F < 0$. Перенесем F в правую часть уравнения и разделим на него. Уравнение принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 = -F/A$, $b^2 = F/C$. Сравнивая с уравнением гиперболы [см. формулу (15), § 7], заключаем, что полученное уравнение является каноническим уравнением гиперболы.

б) $A > 0$, $C < 0$ и $F = 0$. Уравнение принимает вид ($a^2 = A$, $c^2 = -C$):

$$a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \text{ или } (ax - cy)(ax + cy) = 0.$$

Последнему уравнению удовлетворяют только координаты точек плоскости, расположенных на прямых $(ax - cy) = 0$ и $(ax + cy) = 0$, пересекающихся в начале координат, и, таким образом, имеем пару *пересекающихся прямых*.

3) Параболический тип. Если $AC - B^2 = 0$, то поворот осей координат на такой же угол α , как и в лемме 3.1, общее уравнение линии второго порядка может быть приведено к виду

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ey + 2Dx + F = 0. \quad (7)$$

Здесь $AC=0$ и, следовательно, один из коэффициентов A или C равен нулю.

Пусть $A=0$, $C \neq 0$. Представим уравнение (7) в виде

$$C \left[y^2 + \frac{2E}{C}y + \left(\frac{E}{C} \right)^2 \right] + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0,$$

или

$$C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 + 2Dx + F^* = 0,$$

где $F^* = F - E^2/C$. Перенесем начало координат параллельно оси Oy в точку $(0, -E/C)$, т. е. перейдем к новым координатам по формулам $x' = x$, $y' = y + E/C$. Получаем уравнение

$$Cy'^2 + 2Dx' + F^* = 0.$$

Возможны следующие случаи:

а) $D \neq 0$. Запишем уравнение в виде

$$Cy'^2 + 2D \left(x' + \frac{F^*}{2D} \right) = 0.$$

Перенесем теперь начало координат параллельно оси Ox' в точку $(-F^*/(2D); 0)$, т. е. перейдем к новым координатам по формулам $x'' = x' + F^*/(2D)$, $y'' = y'$. Получаем уравнение

$$Cy''^2 + 2Dx'' = 0, \text{ или } y''^2 = 2px'',$$

где $p = -D/C$. Сравнивая последнее уравнение с уравнением параболы [см. формулу (28), § 7], заключаем, что оно является каноническим уравнением параболы.

б) $D=0$. Уравнение имеет вид

$$Cy'^2 + F^* = 0.$$

Если C и F^* имеют разные знаки, то, полагая $|F^*/C| = a^2$, уравнение можно записать в виде $(y' - a)(y' + a) = 0$. Это уравнение определяет *пару параллельных прямых*.

Если C и F^* имеют одинаковые знаки, то уравнение принимает вид $y'^2 + a^2 = 0$. Этому уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки плоскости. Оно называется *уравнением пары мнимых параллельных прямых*.

Наконец, если $F^* = 0$, то уравнение принимает вид $y'^2 = 0$ и определяет ось $O'x'$. Это уравнение можно рассматривать как предельный случай при $F^* \rightarrow 0$, т. е. как *уравнение пары совпавших прямых*.

Заканчивая исследование общего уравнения линий второго порядка, сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 3.7. Пусть в прямоугольной системе координат задано общее уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов: 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс), 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс); 3) $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых); 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола); 5) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ (пара пересекающихся прямых); 6) $y^2 = 2px$ (парабола); 7) $y^2 - a^2 = 0$ (пара параллельных прямых); 8) $y^2 + a^2 = 0$ (пара мнимых параллельных прямых); 9) $y^2 = 0$ (пара совпавших прямых).

ГЛАВА 4

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Начинаем изучение важнейшего понятия математического анализа — понятия функции. В этой главе будет введено понятие предела функции, а также понятие непрерывности функции.

§ 1. Понятие функции

1. Определение функции. **Определение.** Пусть X и Y — некоторые числовые множества. Функцией называется множество f упорядоченных пар чисел $(x; y)^*$ таких, что $x \in X$, $y \in Y$, и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества, а каждое y входит, по крайней мере, в одну пару. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y , и пишут $y = f(x)$. Число y называется значением функции f в точке x . Переменную y называют зависимой переменной, а переменную x — независимой переменной (или аргументом), множество X — областью определения (или существования) функции, а множество Y — множеством значений функции.

Кроме буквы f для обозначения функций используют и другие буквы, например: $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = A(x)$, $y = F(x)$ и т. д. Другими буквами могут обозначаться зависимая и независимая переменные. Иногда зависимую переменную также называют функцией.

Наряду с термином «функция» употребляют равнозначный термин «отображение», а вместо записи $y = f(x)$ пишут $f: x \mapsto y$ и говорят, что отображение f отображает число x в число y , или, что то же самое, число y является образом числа x при отображении f .

При вычислениях запись $y = f(x)$ обычно удобнее записи вида $f: x \mapsto y$. Например, запись $f(x) = x^2$ значительно удобнее

* Напомним, что пара чисел x и y называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое — вторым. Упорядоченную пару чисел записывают в виде $(x; y)$, где x — первое число, y — второе число.

и проще использовать при аналитических преобразованиях, чем запись $f: x \mapsto x^2$.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают буквой C .

Про функцию $f(x)$, определенную на некотором множестве X , говорят, что она *ограничена сверху (снизу)* на этом множестве, если существует число M (m) такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$). Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве X , называется *ограниченной* на этом множестве. Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в виде: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$. Например, функция $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, так как $|\sin x| \leq 1$ при любом x , а функция $f(x) = 1/x$ не является ограниченной сверху на интервале $(0; 1)$, так как не существует числа M такого, что для любого $x \in (0; 1)$ выполняется неравенство $1/x \leq M$.

На плоскости функция изображается в виде графика — множества точек $(x; y)$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым *уравнением графика*.

График функции может представлять собой некоторую «сплошную» линию (кривую или прямую), а может состоять из отдельных точек, например график функции $y = n!$ (рис. 45).

Заметим, что не всякая линия является графиком какой-либо функции. Например, окружность $x^2 + y^2 = 1$ не является графиком функции, так как каждое $x \in (-1; 1)$ входит не в одну, а в две пары чисел $(x; y)$ этого множества с разными значениями y : $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, что противоречит требованию однозначности в определении функции (рис. 43). Однако часть окружности, лежащая в нижней полуплоскости, является графиком функции $y = -\sqrt{1 - x^2}$, а другая ее часть, лежащая в верхней полуплоскости, — графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$.

2. Способы задания функций. Задать функцию f значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют три основных способа задания функций: *аналитический, табличный и графический*.

1) Аналитический способ. Этот способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Рассмотрим примеры.

1. Формула $y = x^2$ задает функцию, область определения которой — числовая прямая $(-\infty; +\infty)$, а множество значений — полупрямая $[0; +\infty)$ (рис. 44, а).

2. Формула $y = \sqrt{1 - x^2}$ задает функцию, областью определения которой является отрезок $[-1; 1]$, а множеством значений — отрезок $[0; 1]$ (рис. 44, б).

3. Формула $y=n!$ ставит в соответствие каждому натуральному числу (т. е. целому положительному числу) n число $y=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Например, если $n=3$, то $y=3!=6$. Таким образом, формула $y=n!$ задает функцию, область определения которой $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, а множество значений $\{1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots\}$ (рис. 45).

$$4. y = \operatorname{sgn} x^* = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Данная функция задана с помощью нескольких формул. Она определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество ее значений состоит из трех чисел: -1 , 0 и $+1$ (рис. 46).

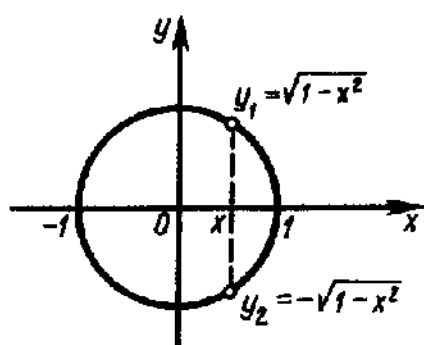


Рис. 43

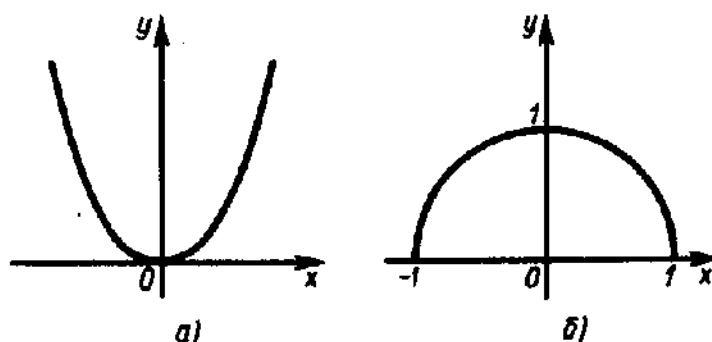


Рис. 44

5. Функция Дирихле**

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$, а множество ее значений состоит из двух чисел: 0 и 1 .

Заметим, что функцию Дирихле изобразить графически не представляется возможным.

2) Табличный способ. Приведем следующую таблицу:

x	0	0,1	0,2	3	0,6	4	0,8	1,5	2
y	-1	10	1	-2	-8	0,5	-2	5	7

Поставим в соответствие каждому x , записанному в первой строке таблицы, число y , стоящее во второй строке под этим числом x , и будем говорить, что полученная функция задана таблицей. Областью определения данной функции является множество, состоящее из девяти чисел x , перечисленных в первой строке таб-

* Термин sgn происходит от латинского слова *signum* — знак.

** Дирихле Петер Густав Лежен (1805 — 1859) — немецкий математик.

лицы, а множеством ее значений — множество, состоящее из девяти чисел y , перечисленных во второй ее строке.

С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента. Таблицы часто используют для задания функций. Так, хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и многие другие. Примером табличного способа задания функции может служить

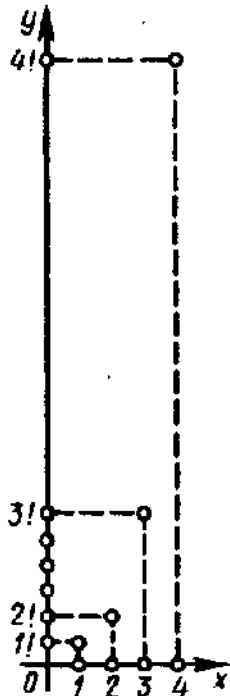


Рис. 45

расписание движения поезда, которое определяет местоположение поезда в отдельные моменты времени.

3) **Графический способ.** Графический способ задания функции обычно используют в практике физических измерений, когда соответствие между переменными x и y задается посредством графика. Во многих случаях такие графики чертятся с помощью самопишущих приборов.

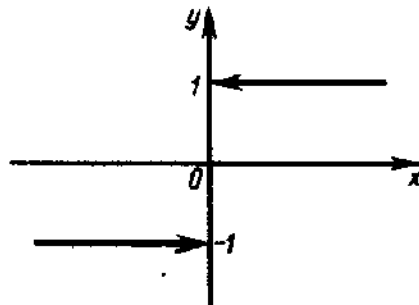


Рис. 46

Так, например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют специальный самопишущий прибор — барограф, который записывает на движущейся ленте в виде кривой линии изменение давления в зависимости от высоты.

3. Классификация функций. Постоянная функция $f(x) = C$, $C = \text{const}$, степенная функция x^α (α — любое число), показательная функция a^x ($0 < a \neq 1$), логарифмическая функция $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$), тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ называются *простейшими элементарными функциями*.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс *элементарных функций*. Примерами элементарных функций являются:

$f(x) = |x|$ ($|x| = \sqrt{x^2}$); $f(x) = \lg^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \sin 3x$; $f(x) = \lg |\sin 3x| - e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$ и т. д.

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1) **Функция вида**

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m,$$

где $m \geq 0$ — целое число; $a_0, a_1, \dots, a_m$ — любые числа — коэффициенты ($a_0 \neq 0$), называется *целой рациональной функцией* или *алгебраическим многочленом степени m* . Многочлен первой степени называется также *линейной функцией*.

2) Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n},$$

называется *дробно-рациональной функцией*.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

3) Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется *иррациональной функцией*.

Например,

$f(x) = \sqrt{x}, f(x) = x + \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{(5x^2 + 4x - 7)/(3x^2 - 8x + 4)} + (\sqrt[5]{x} + x)^3$
и т. д. — иррациональные функции.

4) Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется *трансцендентной функцией*. Это, например, функции $f(x) = \sin x, f(x) = \sin x + x$ и т. д.

§ 2. Предел функции

1. **Предел функции при $x \rightarrow x_0$.** Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Возьмем из X последовательность точек, отличных от x_0 :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, \quad (1)$$

сходящуюся к x_0 . Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots, \quad (2)$$

и можно ставить вопрос о существовании ее предела.

Определение 1. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$)*, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (1) значений аргумента x , отличных от x_0 , соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к числу A .

Символически это записывается так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Функция $f(x)$ может иметь в точке x_0 только один предел. Это следует из того, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет только один предел.

Рассмотрим примеры.

1. Функция $f(x) = C = \text{const}$ имеет предел в каждой точке x_0 числовой прямой. В самом деле, если (1) — любая последователь-

* Предполагается, что такая последовательность существует.

ность, сходящаяся к x_0 , то последовательность (2) имеет вид $C, C, \dots, C, \dots$, т. е. $f(x_n) = C$. Отсюда заключаем, что $f(x_n) \rightarrow C$ при $n \rightarrow \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$.

2. Функция $f(x) = x$ имеет в любой точке x_0 числовой прямой предел, равный x_0 . В этом случае последовательности (1) и (2) тождественны, т. е. $f(x_n) = x_n$. Следовательно, если $x_n \rightarrow x_0$, то $f(x_n) \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = f(x_0) = x_0$.

3. Функция $f(x) = \sin(1/x)$ (рис. 47), определенная для всех $x \neq 0$, в точке $x = 0$ не имеет предела. Действительно, возьмем две последовательности значений аргумента x : $1/\pi, 1/(2\pi), 1/(3\pi), \dots, 1/(n\pi), \dots$ и $2/\pi, 2/(5\pi), 2/(9\pi), \dots, 2/[(4n-3)\pi], \dots$ сходящиеся к нулю. Для них соответствующими последовательностями значений функции являются: $f(1/\pi), f(1/(2\pi)), f(1/(3\pi)), \dots$, $f(1/(n\pi)), \dots$ и $f(2/\pi), f(2/(5\pi)), f(2/(9\pi)), \dots, f(2/[(4n-3)\pi]), \dots$. Так как при любом n $f(1/(n\pi)) = \sin n\pi = 0$, а $f(2/[(4n-3)\pi]) = \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} = 1$, то для первой последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$,

а для второй последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} = 1$. Таким образом, для двух сходящихся к нулю последовательностей значений аргумента x соответствующие последовательности значений функции имеют разные пределы. А это по определению предела функции и означает, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

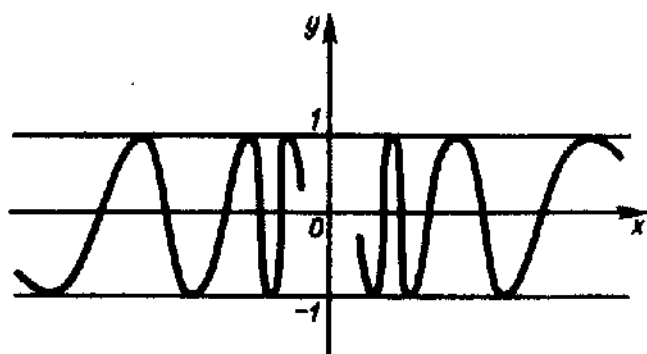


Рис. 47

возьмем любую последовательность значений аргумента x , сходящуюся к нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, и $x_n \neq 0$, тогда в силу теорем 2.7—2.9 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = 1.$$

Таким образом, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, и так как он не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к нулю, то на основании определения предела функции заключаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

5. Функция Дирихле, значения которой в рациональных точках равны единице, а в иррациональных — нулю, не имеет предела

ни в одной точке x_0 числовой прямой. Действительно, для сходящейся к точке x_0 последовательности рациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен единице, а для сходящейся к точке x_0 последовательности иррациональных значений аргумента предел соответствующей последовательности значений функции равен нулю.

Существует другое определение предела функции.

Определение 2. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Используя логические символы, определение 2 можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим, что неравенства $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - x_0| < \delta$.

Первое определение основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его часто называют определением «на языке последовательностей». Второе определение называют определением «на языке $\varepsilon - \delta$ ».

Теорема 4.1. Первое и второе определения предела функции эквивалентны.

Доказательство. 1) Пусть A — предел $f(x)$ в точке x_0 согласно первому определению. Покажем, что A — предел согласно второму определению. Предположим обратное, т. е. A не является пределом этой функции согласно второму определению. Это значит, что не для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. существует такое $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, для которого, какое бы $\delta > 0$ ни взять, найдется хотя одна точка $x \neq x_0$ такая, что $|x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Будем выбирать в качестве δ последовательно числа:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Тогда:

для $\delta = 1$ в X существует такое $x_1 \neq x_0$, что $|x_1 - x_0| < 1$,
а $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon_0$;

для $\delta = 1/2$ в X существует такое $x_2 \neq x_0$, что $|x_2 - x_0| < 1/2$,
а $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon_0$;

для $\delta = 1/3$ в X существует такое $x_3 \neq x_0$, что $|x_3 - x_0| < 1/3$,
а $|f(x_3) - A| \geq \varepsilon_0$;

.....
для $\delta = 1/n$ в X существует такое $x_n \neq x_0$, что $|x_n - x_0| < 1/n$,
а $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

В результате получается последовательность точек, отличных от x_0 :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

сходящаяся к точке x_0 , так как $|x_n - x_0| < 1/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, согласно первому определению предела функции, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A . Следовательно, для ε_0 найдется номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполнено неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$. Но этого быть не может, так как для всех x_n выполняется неравенство $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает, что число A — предел функции $f(x)$ в точке x_0 согласно второму определению.

2) Пусть теперь A — предел $f(x)$ в точке x_0 согласно второму определению. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Покажем, что A — предел $f(x)$ согласно первому определению. Возьмем любую последовательность точек

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

сходящуюся к точке x_0 ($x_n \neq x_0$). Тогда для данного значения $\delta > 0$, соответствующего ε по второму определению, найдется такое N , что при $n > N$ будут выполнены неравенства $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Но вместе с этим в силу второго определения будет выполняться и неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. А так как ε было выбрано произвольно, то это и означает, что $f(x_n) \rightarrow A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0 ($x_n \neq x_0$), т. е. число A является пределом $f(x)$ в точке x_0 согласно первому определению. ■

Итак, установлена эквивалентность обоих определений предела функции и можно использовать любое из них в зависимости от того, какое более удобно при решении той или иной задачи.

Заметим, что определение предела функции «на языке последовательностей» называют также определением предела функции по Гейне*, а определение предела функции «на языке $\varepsilon - \delta$ » — определением предела функции по Коши**.

2. Предел функции при $x \rightarrow x_0 -$ и при $x \rightarrow x_0 +$. В дальнейшем будут использованы понятия односторонних пределов функции, которые определяются следующим образом.

Определение 3. Число A называется *правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0* , если для любой сходящейся к x_0 последовательности (1), элементы x_n которой больше (меньше) x_0 , соответствующая последовательность (2) сходится к A .

$$\text{Символическая запись: } \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A \left(\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A \right).$$

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ***. Она имеет в точке $x = 0$ правый и левый пределы: $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1$. В самом деле, если (1) — любая сходящаяся

* Гейне Генрих Эдуард (1821—1881) — немецкий математик.

** Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик.

*** Определение функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ приведено в п. 2, § 1.

к нулю последовательность значений аргумента этой функции, элементы x_n которой больше нуля ($x_n > 0$), то $\operatorname{sgn} x_n = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1$. Аналогично устанавливается, что $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Можно дать равносильное определение односторонних пределов функции «на языке $\varepsilon - \delta$ »: число A называется *правым (левым) пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$), выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символическая запись:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, x_0 < x < x_0 + \delta (x_0 - \delta < x < x_0)) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 4.2. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.*

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$.

Тогда, согласно определению предела функции слева и справа, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для всех x , удовлетворяющих неравенствам $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, и для всех x , удовлетворяющих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех x , удовлетворяющих неравенствам $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

А это, согласно определению 2, и означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Обратно, пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0 , для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенствам $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тем самым, как для $x_0 - \delta < x < x_0$, так и для $x_0 < x < x_0 + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это, согласно определению односторонних пределов, и означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$. ■

3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$. Кроме рассмотренных понятий предела функции при $x \rightarrow x_0$ и односторонних пределов существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение 4. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (1) значений аргумента соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к A .

Символическая запись: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Определение 5. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы x_n которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность значений функции сходится к A .

Символическая запись: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$).

Рассмотрим пример. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Эта функция имеет предел, при $x \rightarrow \infty$ равный нулю. Действительно, если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность значений аргумента, то соответствующая последовательность значений функции: $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n, \dots$, по

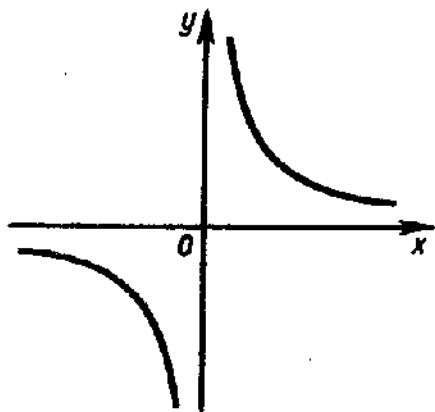


Рис. 48

теореме 2.1 является бесконечно малой и поэтому имеет предел, равный нулю, т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$ (рис. 48).

Определения 4—5 даны «на языке последовательностей». Можно дать равносильные определения «на языке $\epsilon - \delta$ » и записать их с помощью логических символов. Рекомендуем сделать это самостоятельно. В качестве примера сформулируем определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$.

Определение 6. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число δ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $x > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \epsilon$.

§ 3. Теоремы о пределах функций

Определение предела функции «на языке последовательностей» дает возможность перенести доказанные выше теоремы о пределах последовательностей на функции. Покажем это на примере двух теорем.

Теорема 4.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы B и C . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $C \neq 0$) имеют в точке x_0 пределы, равные соответственно $B \pm C$, BC и $\frac{B}{C}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) — произвольная сходящаяся к x_0 последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ значений этих функций имеют пределы B и C . Но тогда в силу теорем 2.7—2.9 последовательности $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n)g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$ (при $C \neq 0$) имеют пределы, соответственно равные $B \pm C$, BC и B/C . Согласно определению 1 предела функции

это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = B \pm C, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) g(x)] = BC, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{C}. \blacksquare$$

Теорема 4.4. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 , и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в точке x_0 предел, равный A , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$. Пусть, кроме того, выполняются неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) — произвольная сходящаяся к x_0 последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $h(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ значений этих функций имеют предел, равный A , т. е. $f(x_n) \rightarrow A$, $h(x_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Используя неравенства, данные в условии теоремы, можно записать

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n).$$

Отсюда по теореме 2.11 следует, что $g(x_n) \rightarrow A$. Согласно определению 1 предела функции это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A. \blacksquare$$

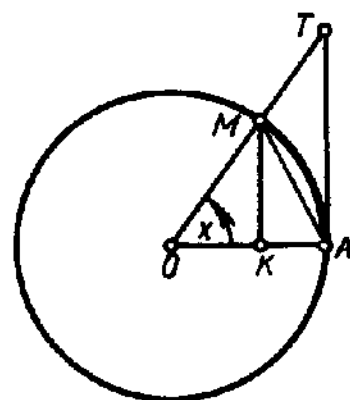


Рис. 49

З а м е ч а н и е. Теоремы 4.3 и 4.4 верны также и в случае, когда x_0 является одним из символов ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

§ 4. Два замечательных предела

1. Первый замечательный предел. Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим дугу окружности радиуса $R=1$ с центральным углом, радианная мера которого равна x ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) (рис. 49). Тогда

$$OA = 1, \sin x = MK, \operatorname{tg} x = AT. \quad (1)$$

Очевидно, что площадь треугольника OAM меньше площади сектора OAM , которая меньше площади треугольника OAT , или, что то же самое, $(1/2) OA \cdot MK < (1/2) OA \cdot AM < (1/2) OA \cdot AT$. Принимая во внимание равенства (1), последнее соотношение можно записать в виде $(1/2) \sin x < (1/2) x < (1/2) \operatorname{tg} x$, откуда получаем

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Разделив эти неравенства на $\sin x$, получим $1 > (\sin x)/x > \cos x$, откуда находим: $0 < 1 - (\sin x)/x < 1 - \cos x$. Так как $\sin(x/2) < 1$, то $\sin^2(x/2) < \sin(x/2)$. Поэтому, учитывая первое неравенство (2), для всех x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x < \pi/2$, получаем $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2) < 2 \sin(x/2) < 2(x/2) = x$.

Итак, $0 < 1 - (\sin x)/x < x$ при $0 < x < \pi/2$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Тогда для всех x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x < \delta$, будет выполняться неравенство $x < \varepsilon$, поэтому

$$0 < 1 - (\sin x)/x < \varepsilon, \text{ откуда } |1 - (\sin x)/x| < \varepsilon.$$

Это означает, что 1 является правым пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Заметим теперь, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ — четная, так как $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$. Поэтому и левый предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ равен 1. Отсюда в силу теоремы 4.2 следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

З а м е ч а н и е. Используя неравенства $\sin x < x$ и $1 - \cos x < x$ при $0 < x < \pi/2$, полученные при рассмотрении первого замечательного предела, легко доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Сделайте это самостоятельно.

С помощью первого замечательного предела вычисляются многие другие пределы.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби при $x \rightarrow 0$ стремится к нулю. Поэтому теорема 4.3 здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \sin(x/2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5/4}{(\sin 4x)/(4x)} = \frac{5/4}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 4x)/(4x)} = \frac{5/4}{1} = 1,25.$$

2. Второй замечательный предел. Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Как известно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ (см. гл. 2, § 3, п. 2). Пусть $x > 1$. Положим $n = [x]$; тогда $x = n + \alpha$, где n — натуральное число, а α удовлетворяет условию $0 \leq \alpha < 1$. Так как $n \leq x < n+1$, $1/(n+1) < 1/x \leq 1/n$, то

$$(1 + 1/(n+1))^n < (1 + 1/x)^x < (1 + 1/n)^{n+1}.$$

При $x \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n) = e \cdot 1 = e$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/(n+1))^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/(n+1))} = \frac{e}{1} = e.$$

Отсюда по теореме 4.4 получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e.$$

Пусть теперь $x < -1$; положим $x = -y$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

при $x \rightarrow -\infty$.

Объединяя оба случая, окончательно имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e. \blacksquare$$

Второй замечательный предел имеет широкое применение. С его помощью находятся многие другие пределы.

Пример. 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$.

Решение. Сделаем замену переменной, полагая $1/x = \alpha$. Тогда очевидно, что $\alpha \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + 1/\alpha)^\alpha = e.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$.

Решение. Положим $x = 3t$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^{3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} [(1 + 1/t)^t (1 + 1/t)^t (1 + 1/t)^t] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/t)^t = e \cdot e \cdot e = e^3. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \log_a(1+x) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right]. \end{aligned}$$

Но $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ (см. пример 4). Поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

В частности, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ при $a = e$.

§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

1. Бесконечно малые функции. Определение 1. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 -$ и $x \rightarrow x_0 +$.

Можно дать равносильное определение бесконечно малой функции «на языке $\varepsilon - \delta$ »: функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$; или с помощью логических символов:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x)| < \varepsilon$; и «на языке последовательностей»: функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x , отличных от x_0 , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ является бесконечно малой.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.5. Для выполнения равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Рассмотрим разность $f(x) - A = \alpha(x)$ и покажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$. Действительно, пределы каждой из функций $f(x)$ и A при $x \rightarrow x_0$ равны A , и поэтому в силу теоремы 4.3

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} A = A - A = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(x) - A = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Так как $f(x) = A + \alpha(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [A + \alpha(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \blacksquare$$

Из теоремы 4.5 получаем специальное представление для функции, имеющей в точке $x = x_0$ предел, равный A :

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

При этом обычно говорят, что функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 отличается от A на бесконечно малую функцию.

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые последовательности. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow x_0$.

Эта теорема непосредственно вытекает из первого определения предела функции и теорем 2.2—2.4.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x \rightarrow x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 -$ и $x \rightarrow x_0 +$.

2. Бесконечно большие функции. Определение 2. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или просто бесконечно большой) в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция стремится к бесконечности при $x \rightarrow x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке $x = x_0$.

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$) и говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечный предел, равный $+\infty$ ($-\infty$).

Используя логические символы, определение 2 можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in X, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x)| > \varepsilon.$$

По аналогии с конечными односторонними пределами определяются и бесконечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = -\infty.$$

Так, например, пишут $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяю-

щих неравенствам $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$. Символическая запись

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x_0 < x < x_0 + \delta) : f(x) > \varepsilon.$$

«На языке последовательностей» это же определение записывается так: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x , элементы x_n которой больше x_0 , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой положительного знака.

Точное определение других подобных пределов рекомендуем сделать самостоятельно.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Так, например, функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Символическая запись определения бесконечно большой функции при $x \rightarrow \infty$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, |x| > \delta) : |f(x)| > \varepsilon.$$

Если же выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), то пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$).

Предлагаем самостоятельно сформулировать определение бесконечно большой функции при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

В заключение покажем, что между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, как и между соответствующими последовательностями, т. е. функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой, и наоборот.

В самом деле, пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Дока-

жем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ — бесконечно малая функция в точке x_0 , то для числа $1/\varepsilon$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < 1/\varepsilon$. Но тогда для тех же x выполняется неравенство $|1/f(x)| > \varepsilon$, т. е. $1/f(x)$ — бесконечно большая функция в точке $x = x_0$, что и требовалось доказать. Обратное утверждение рекомендуем доказать самостоятельно.

§ 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Как было показано, сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются бесконечно малыми функциями. Этого, вообще говоря, нельзя сказать о частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к различным результатам. Так,

например, если $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Если же $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций.

Пусть при $x \rightarrow x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

1) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (говорят также, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$);

2) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ (A — число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка;

3) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые. Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

В некоторых случаях недостаточно знать, что одна из двух бесконечно малых является бесконечно малой более высокого порядка, чем другая. Нужно еще оценить, как высок этот порядок. Поэтому вводится следующее правило:

4) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая n -го порядка относительно $\beta(x)$.

Существуют аналогичные правила для сравнения бесконечно малых функций при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, а также при $x \rightarrow x_0$ справа и слева.

Рассмотрим примеры.

1. Функции $\sin x$ и x являются при $x \rightarrow 0$ эквивалентными бесконечно малыми, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Функции $\sin 3x$ и $\sin x$ являются при $x \rightarrow 0$ бесконечно малыми одного порядка, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 \sin 3x)/(3x)}{(\sin x)/x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 3.$$

3. Функция $\alpha(x) = 1 - \cos x$ является при $x \rightarrow 0$ бесконечно малой второго порядка малости по отношению к бесконечно малой x , так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

При сравнении бесконечно малых функций часто используют символ o (« o малое»). Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке x_0 более высокого порядка, чем бесконечно малая в этой же

точке $\beta(x)$, то это условно записывается так:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые в точке x_0 , то функция $\alpha(x)\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем каждый из сомножителей. В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

и поэтому $\alpha(x)\beta(x) = o(\beta(x))$, $\alpha(x)\beta(x) = o(\alpha(x))$.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причем $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \end{aligned}$$

Доказанное утверждение во многих случаях упрощает вычисление пределов

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3}$.

Решение. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $x + x^3 \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5.$$

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Функции $\alpha(x) = (1+x)/x$ и $\beta(x) = 1/x$ являются при $x \rightarrow 0$ эквивалентными бесконечно большими, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1.$$

В этом случае говорят также, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок роста при $x \rightarrow 0$.

2. Функция $\alpha(x) = x^2 + 4$ является при $x \rightarrow \infty$ бесконечно большой более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3 - 2$ (имеет менее высокий порядок роста), так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/x^2}{x - 2/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3. Бесконечно большие при $x \rightarrow \infty$ функции $\alpha(x) = 2x^2 + 1$ и $\beta(x) = x^2 - 1$ имеют одинаковый порядок роста, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/x^2}{1 - 1/x^2} = 2.$$

4. Функция $\alpha(x) = x^4 + x + 1$ является при $x \rightarrow \infty$ бесконечно большой второго порядка по отношению к бесконечно большой $\beta(x) = x^2 + 1$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/x^3 + 1/x^4}{1 + 2/x^2 + 1/x^4} = 1.$$

§ 7. Понятие непрерывности функции

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа.

1. Определение непрерывности функции. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)^* \quad (1)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, то соотношение (1) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

т. е. для непрерывной функции можно переставить знак функции и знак предела.

Приведем равносильное определение непрерывности функции «на языке последовательностей»: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любой последовательности значений аргумента $x: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, сходящейся к x_0 , последовательность соответствующих значений функции: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к $f(x_0)$.

Сформулируем определение непрерывности функции «на языке $\varepsilon - \delta$ ».

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Эквивалентность этих определений очевидна.

Запишем определение 2, используя логические символы:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in X, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0) \right)$, то функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке x_0 справа (слева). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и слева и справа, то она непрерывна в этой точке. Действительно, в силу теоремы 4.2 в данном случае предел функции в точке x_0 равен ее значению в этой точке.

* Из определения следует, что если функция непрерывна в точке x_0 , то она определена в этой точке, т. е. существует $f(x_0)$. Заметим, что при определении предела функции в точке x_0 этого не требовалось.

Приведем еще одно определение непрерывности функции, которое по существу является перефразировкой первого определения. Перенесем в равенстве (1) $f(x_0)$ в левую часть и внесем $f(x_0)$ под знак предела. Так как условия $x \rightarrow x_0$ и $(x - x_0) \rightarrow 0$ равносильны, то получаем

$$\lim_{(x-x_0) \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \quad (2)$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается, как правило, Δx , а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции* в точке x_0 , вызванным приращением аргумента Δx , и обозначается Δy . Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Отметим, что при фиксированной точке x_0 Δy является функцией аргумента Δx . Геометрический смысл приращений ясен из рис. 50. Равенство (2) в новых обозначениях принимает вид

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (3)$$

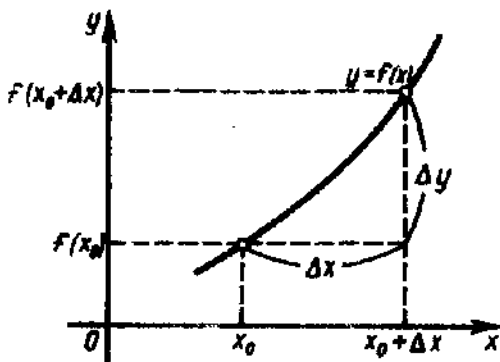


Рис. 50

Соотношение (3) и является еще одним определением непрерывности функции, которое можно сформулировать так.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $\Delta x \rightarrow 0$.

Последнее определение для практического использования бывает иногда более удобным, и им будем также пользоваться.

2. Арифметические действия над непрерывными функциями.

Теорема 4.7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в этой точке (последняя при $g(x_0) \neq 0$).

Доказательство. Так как непрерывные в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы, равные $f(x_0)$ и $g(x_0)$, то по теореме 4.3 пределы функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ существуют и соответственно равны $f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x_0)g(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Но эти величины равны значениям соответствующих функций в точке x_0 . Следовательно, согласно определению 1 функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке x_0 . ■

§ 8. Непрерывность некоторых элементарных функций

Одним из важных свойств элементарных функций является их непрерывность в каждой точке, в окрестности которой они определены. На примере некоторых функций проверим данный факт, ис-

пользуя определение непрерывности функции в точке и теорему 4.7.

1. Непрерывность рациональных функций. Простейшим примером функции, непрерывной в любой точке x_0 числовой прямой, может служить постоянная функция $f(x) = C$. Действительно, в этом случае $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C = f(x_0)$ (см. пример 1, § 2), т. е. по-

стоянная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой.

Непрерывна также в каждой точке x_0 числовой прямой функция $f(x) = x$, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f(x_0)$ (см. пример 2, § 2), т. е.

предел функции в точке x_0 равен ее значению в этой точке. Из сказанного и теоремы 4.7 следует, что в любой точке x_0 функции $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, $x^4 = x^3 \cdot x$, ..., $x^n = x^{n-1} \cdot x$ (n — натуральное число) непрерывны. Как известно, функция $f(x) = x^n$ называется степенной, а функция вида

$$P(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

где $n \geq 0$ — целое число; $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ — любые числа, — алгебраическим многочленом.

Каждое из слагаемых

$$C_0 x^n, C_1 x^{n-1}, C_2 x^{n-2}, \dots, C_n$$

есть произведение двух непрерывных функций (постоянной и степенной). По теореме 4.7 оно непрерывно в любой точке x . Многочлен $P(x)$ является, таким образом, суммой функций, непрерывных в любой точке x , и, следовательно, непрерывен в любой точке x .

Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — алгебраические многочлены, непрерывна во всех таких точках x , в которых ее знаменатель не равен нулю (т. е. во всех точках, за исключением корней знаменателя), как частное непрерывных функций.

Например, функция $R(x) = (3x^2 + 7x - 1)/(x^2 - 1)$ непрерывна во всех точках x , отличных от $+1$ и -1 .

2. Непрерывность тригонометрических функций. Рассмотрим тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Покажем, что функция $\sin x$ непрерывна в любой точке x . Воспользуемся определением 3 непрерывности функции. Задав аргументу x приращение Δx , получим приращение функции

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x, \text{ или} \\ \Delta y &= 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в левой и правой частях равенства при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \right] = 0,$$

так как $|\cos(x + \Delta x/2)| \leq 1$,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0^*,$$

а произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая. Таким образом, функция $\sin x$ непрерывна в любой точке x .

Непрерывность функции $\cos x$ в любой точке x доказывается аналогично.

Из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$ по теореме 4.7 следует непрерывность функций $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\sec x = 1 / \cos x$ во всех точках, где $\cos x \neq 0$, т. е. во всех точках, кроме $x = \pi/2 + n\pi$, и функций $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ и $\operatorname{cosec} x = 1 / \sin x$ во всех точках, кроме $x = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

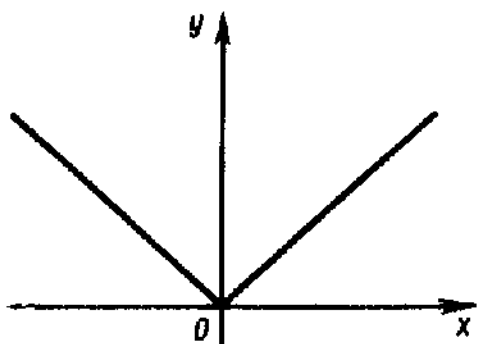


Рис. 51

3. Непрерывность функции $f(x) = |x|$. Функция $f(x) = |x|$, график которой изображен на рис. 51, определена и непрерывна во всех точках числовой прямой. Действительно, в точках полупрямой $(0, +\infty)$ она непрерывна, так как при $x > 0$ $f(x) = x$ (см. п. 1). В точках полупрямой $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ также непрерывна, так как при $x < 0$ $f(x) = -x$, ее можно представить как произведение двух непрерывных функций (-1) и x и применить теорему 4.7 о непрерывности произведения. Чтобы установить непрерывность функции $|x|$ в точке $x = 0$, вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = - \lim_{x \rightarrow 0-} x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

Итак, пределы функции в точке $x = 0$ слева и справа совпадают и равны значению функции в этой точке. Отсюда следует, что функция $|x|$ непрерывна в точке $x = 0$ и, следовательно, непрерывна во всех точках числовой прямой.

Таким образом, рассмотренные функции непрерывны в каждой точке, в окрестности которой они определены. На основании теоремы 4.7 о непрерывности суммы, разности, произведения и частного можно утверждать, что функции, получаемые из них с помощью конечного числа арифметических действий, являются также непрерывными функциями в каждой точке, в окрестности которой они определены.

Будем говорить, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала; непрерывна

*Здесь использован первый замечательный предел, который получается в результате замены переменной $t = \Delta x/2$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (очевидно, что $t = \Delta x/2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$).

на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) , и непрерывна в точке a справа, а в точке b слева, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \text{ а } \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b).$$

§ 9. Классификация точек разрыва функции

1. Определение и классификация точек разрыва функции. **Определение.** Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

Разрывы функций классифицируются следующим образом.

Разрыв 1-го рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x).$$

Пример. Для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ точка $x = 0$ является точкой разрыва 1-го рода (см. рис. 46), так как $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

Разрыв 2-го рода. Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода (см. рис. 48), так как $\lim_{x \rightarrow 0+} (1/x) = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (1/x) = -\infty.$$

2. Кусочно-непрерывные функции. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрыв 1-го рода и, кроме того, имеет односторонние пределы в точках a и b .

Функция называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой*, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Пример. Функция $f(x) = [x]$ кусочно-непрерывна как на любом отрезке, так и на всей числовой прямой. Напомним, что символ $[x]$ обозначает целую часть числа x . График функции $f(x) = [x]$ изображен на рис. 52, функция $[x]$ в точках $x = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) непрерывна справа и разрывна слева. Во всех других точках она непрерывна как справа, так и слева.

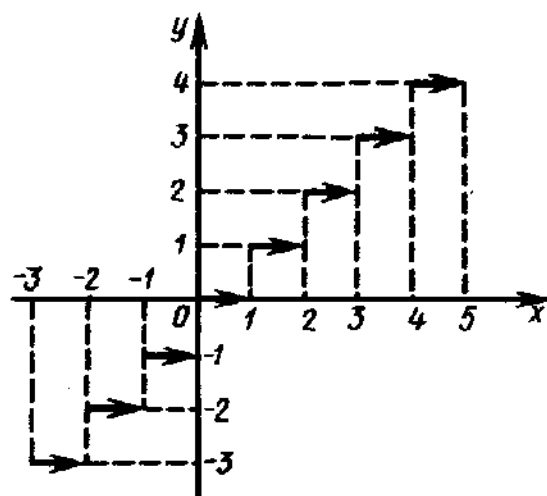


Рис. 52

§ 10. Основные свойства непрерывных функций

1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Теорема 4.8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $f(x_0) > 0$ (рис. 53). Тогда в силу второго определения непрерывности функции для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, или, что то же самое, выполняются неравенства

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad (1)$$

для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Возьмем $\varepsilon = f(x_0)$. Тогда из левого неравенства (1) получаем: $f(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что и требовалось доказать.

Если же $f(x_0) < 0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$. Так как $-f(x_0) > 0$, то по доказанному существует δ -окрестность точки x_0 , в которой $-f(x) > 0$ и, следовательно, $f(x) < 0$. ■

2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение. Рассмотрим теорему о прохождении непрерывной функции через нулевое значение при смене знаков.

Теорема 4.9 (первая теорема Больцано — Коши)*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (рис. 54). Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка $[a, b]$ равно нулю, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух полученных отрезков, на концах которого функция имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_1, b_1]$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка $[a_1, b_1]$ равно нулю, то теорема доказана. В противном случае выберем тот из двух полученных отрезков, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков, и обозначим его $[a_2, b_2]$. Если продолжить этот процесс неограниченно, то либо на каком-то k -м шаге значение функции в середине отрезка $[a_k, b_k]$ окажется равным нулю и тогда теорема доказана, либо получим последовательность

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

вложенных отрезков, причем $b_n - a_n = (b - a)/2^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и на концах каждого отрезка $[a_n, b_n]$ функция имеет значения разных знаков.

По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c , принадлежащая всем отрезкам. Докажем, что $f(c) = 0$. Действительно, если допустить, что $f(c) > 0$, то по теореме 4.8 об устойчи-

*Больцано Бернард (1781 — 1848) — чешский математик.

ности знака непрерывной функции существует окрестность точки c , в которой $f(x) > 0$. В эту окрестность при достаточно большом n попадет отрезок $[a_n, b_n]$, следовательно, на отрезке $[a_n, b_n]$ будет выполнено неравенство $f(x) > 0$. Но это противоречит тому, что на концах отрезка $[a_n, b_n]$ функция имеет значения разных знаков. Аналогично доказывается, что $f(c)$ не может быть меньше нуля. Остается принять, что $f(c) = 0$. При этом очевидно, что точка $c \in (a, b)$. ■

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл: непрерывная кривая при переходе из одной полуплоскости, границей которой является ось абсцисс, в другую пересекает эту ось.

Рассмотрим теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

Теорема 4.10 (вторая теорема Больцано — Коши). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть, далее, C — любое число, заключенное между A и B . Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется точка c такая, что $f(c) = C$.

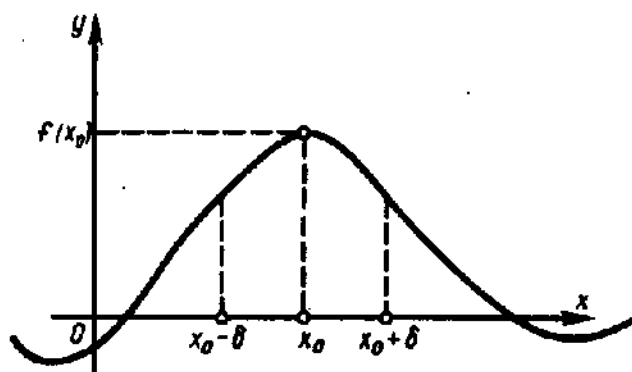


Рис. 53

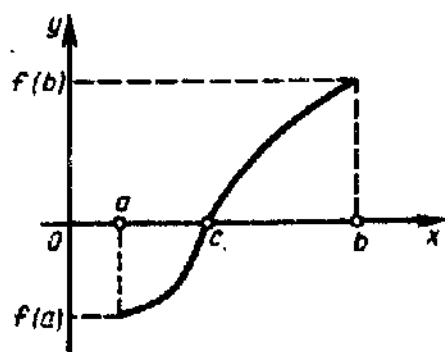


Рис. 54

Другими словами, непрерывная функция при переходе от одного значения к другому принимает и все промежуточные значения.

Доказательство. Пусть для определенности $A < B$ и $A < C < B$ (рис. 55). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ (как разность непрерывных функций) и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a) - C = A - C < 0, \\ \varphi(b) &= f(b) - C = B - C > 0.\end{aligned}$$

По теореме 4.9 существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi(c) = f(c) - C = 0$. Отсюда $f(c) = C$. ■

С л е д с т в и е. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X , то множество ее значений Y также представляет собой некоторый промежуток.

Прежде чем доказать это следствие, введем понятие точных граний функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве

X , а Y — множество ее значений. Если множество Y ограничено сверху (снизу), то оно имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Точная верхняя (нижняя) грань множества Y называется *точной верхней (нижней) гранью функции* $y=f(x)$ на множестве X и обозначается $\sup_x f(x)$ ($\inf_x f(x)$). Иными словами, определение точной верхней (нижней) грани функции $y=f(x)$ на множестве X можно сформулировать так: число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью функции* $y=f(x)$ на множестве X , если выполнены два условия:

- 1) $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) для любого $x \in X$;
- 2) для любого числа $M' < M$ ($m' > m$) найдется такая точка $x' \in X$, что $f(x') > M'$ ($f(x') < m'$).

Первое из этих условий показывает, что число M (m) является одной из верхних (нижних) граней функции $y=f(x)$ на множестве X , а второе условие показывает, что M (m) — наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней функции, т. е. точная грань.

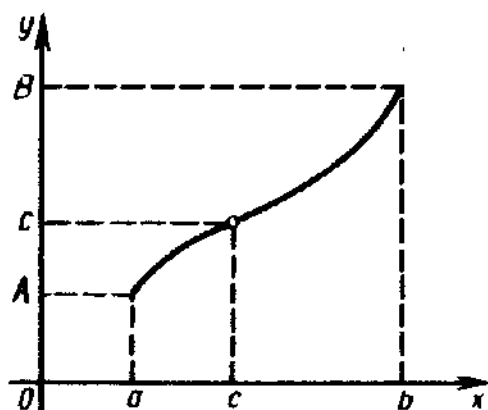


Рис. 55

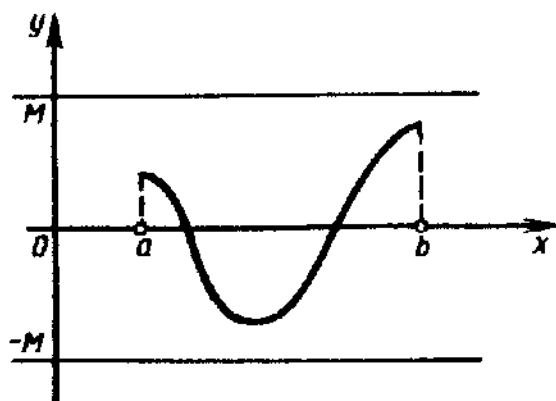


Рис. 56

Если множество Y не ограничено сверху (снизу), то пишут $\sup_x f(x) = +\infty$ ($\inf_x f(x) = -\infty$). В этом случае для любого числа A существует такая точка $x' \in X$, что $f(x') > A$ ($f(x') < A$).

Докажем теперь следствие теоремы 4.10.

Доказательство. Пусть $m = \inf_x f(x)$, $M = \sup_x f(x)$. Возьмем любое y из Y , не равное m и M , и выберем два значения y_1 и y_2 функции $f(x)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$m \leq y_1 < y < y_2 \leq M$$

(если $M = +\infty$ ($m = -\infty$), то $y_2 < M$ ($m < y_1$)). Существование таких значений функции $f(x)$ следует из определения точных граней. Тогда по теореме 4.10 о промежуточных значениях непрерывной функции существует точка x такая, что $f(x) = y$. Следовательно, множество Y представляет собой некоторый промежуток (конечный или бесконечный) с концами m и M , которые в зависимости от конкретного случая могут ему принадлежать или не принадлежать. ■

3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке. Напомним, что функция $f(x)$ называется ограниченной на отрезке

$[a, b]$, если существует число $M > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$ или $-M \leq f(x) \leq M$, т. е. график $f(x)$ не выходит из полосы, ограниченной прямыми $y = M$ и $y = -M$ (рис. 56).

Теорема 4.11 (первая теорема Вейерштрасса)*. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0 , ограничена в некоторой ее окрестности.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$; тогда согласно второму определению непрерывности функции в точке для данного ε существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Используя это неравенство, получаем $|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$, т. е. $|f(x)| < M$, где $M = 1 + |f(x_0)|$. Отсюда заключаем, что функция $f(x)$ ограничена в δ -окрестности точки x_0 . ■

Доказательство теоремы. Предположим обратное, т. е. допустим, что функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, тогда, по крайней мере, на одном из двух полученных отрезков функция $f(x)$ неограничена (в противном случае она была бы ограничена на $[a, b]$). Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот отрезок, на котором функция $f(x)$ не ограничена, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

вложенных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ не ограничена, причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c , принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$ по условию определена и непрерывна в точке c , следовательно, согласно доказанной лемме в некоторой окрестности точки c она ограничена. При достаточно большом n в эту окрестность попадет отрезок $[a_n, b_n]$, на котором функция $f(x)$ также ограничена. Но это противоречит тому, что $f(x)$ не ограничена на каждом из вложенных отрезков. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

З а м е ч а н и е. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом (a, b) . Так, например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на $(0, 1)$, но не ограничена, так как $\lim_{x \rightarrow 0+} (1/x) = +\infty$. Доказательство теоремы для интервала «не проходит» там, где утверждается, что в точке c функция определена и непрерывна. Для интервала

*Вейерштрасс Карл (1815—1897) — немецкий математик.

точка c может совпадать с его концом и тогда $f(x)$ не будет определена и непрерывна в точке c .

4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней. В том случае, когда точные грани функции являются значениями функции, говорят, что функция достигает своих точных граней. Однако [см. формулу (1), гл. 1, теорему 1.1] не всякому множеству принадлежат его точные грани. Следующий пример показывает, что точные грани функции не всегда достигаются.

Пусть на отрезке $[0, b]$, $b \geq 1$, определена функция $f(x) = x - [x]$, график которой изображен на рис. 57. Множеством ее значений является $[0, 1)$. Функция ограничена и сверху и снизу, имеет на данном отрезке точную верхнюю грань, равную 1, и точную нижнюю грань, равную 0. Очевидно, функция принимает значение, равное 0, но не принимает значения, равного 1. Следовательно, можно сказать, что функция достигает своей точной нижней и не достигает своей точной верхней грани.

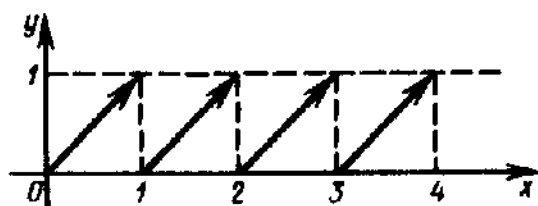


Рис. 57

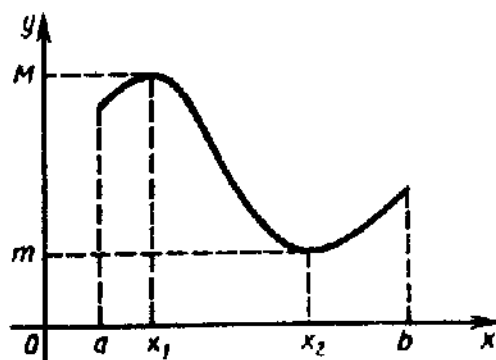


Рис. 58

Установим, при каком условии функция достигает своих точных граней.

Теорема 4.12 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных граней, т. е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что (рис. 58)

$$f(x_1) = M = \sup_{[a, b]} f(x), \quad f(x_2) = m = \inf_{[a, b]} f(x).$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме 4.11 она ограничена на этом отрезке. Следовательно, согласно теореме 1.1 существуют точная верхняя M и точная нижняя m грани функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Покажем, что функция $f(x)$ достигает M , т. е. существует такая точка $x_1 \in [a, b]$, что $f(x_1) = M$. Будем рассуждать от противного. Пусть функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a, b]$ значения, равного M . Тогда для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$. Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную, всюду положительную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

По теореме 4.7 функция $F(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. В этом случае согласно теореме 4.11 функция $F(x)$ ограничена, т. е. найдется положительное число μ такое, что для всех $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu, \text{ откуда } f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}.$$

Таким образом, число $M - 1/\mu$, меньшее M , является верхней гранью $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Но это противоречит тому, что число M является точной верхней, т. е. наименьшей верхней гранью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Это противоречие и доказывает, что существует точка $x_1 \in [a, b]$, в которой $f(x_1) = M$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на $[a, b]$ своей точной нижней грани m . ■

З а м е ч а н и е 1. После того как доказано, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на этом отрезке своих точных верхней M и нижней m граней, можно назвать точную верхнюю грань максимальным значением, а точную нижнюю грань минимальным значением функции $f(x)$ на этом отрезке и сформулировать теорему 4.12 в следующем виде: *непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимальное и минимальное значения.*

З а м е ч а н и е 2. Разность между наибольшим и наименьшим значениями непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется колебанием непрерывной функции на этом отрезке и обозначается буквой ω : $\omega = M - m$, где

$$M = \max_{[a, b]} f(x), m = \min_{[a, b]} f(x).$$

5. Понятие равномерной непрерывности функции. К числу других свойств функции, непрерывной на отрезке, относится очень важное свойство, называемое равномерной непрерывностью. Оно широко используется при доказательстве ряда фундаментальных теорем.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на некотором промежутке X , и пусть точка $x_0 \in X$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то согласно второму определению непрерывности для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Ясно, что δ зависит от ϵ , но δ зависит также и от x_0 . При изменении x_0 в пределах рассматриваемого промежутка (при постоянном ϵ) число δ будет различным для разных x_0 . Чем «круче» идет график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 , тем меньше будет δ , соответствующее этой точке (рис. 59).

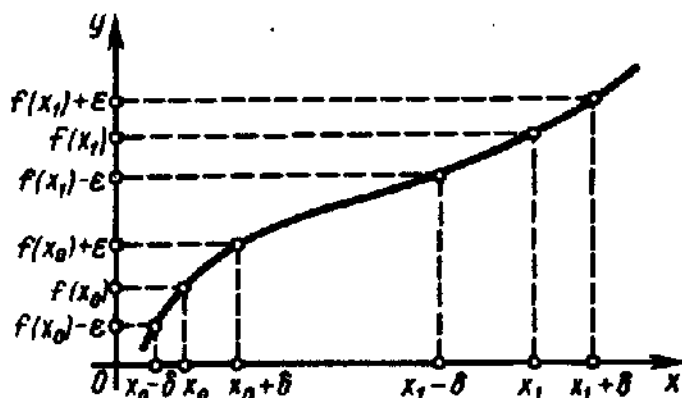


Рис. 59

Таким образом, при задании ε каждой точке x рассматриваемого промежутка соответствует некоторое $\delta > 0$. Если бы точек было конечное число, то из конечного множества чисел δ можно было бы выбрать наименьшее положительное δ , которое зависело бы только от ε и было «пригодно» для всех x . Для бесконечного числа точек этого, вообще говоря, сделать нельзя, так как этим точкам соответствует бесконечное множество чисел δ , среди которых могут найтись и сколь угодно малые.

Возникает вопрос, существуют ли непрерывные функции, определенные на некоторых промежутках, для которых по любому $\varepsilon > 0$ находилось бы $\delta > 0$, не зависящее от x , т. е. δ было бы общим для всех x из рассматриваемого промежутка. Это приводит к понятию равномерной непрерывности функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно-непрерывной на промежутке X , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

В логических символах это определение имеет вид

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x', x'' \in X; |x'' - x'| < \delta) : |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

По самому определению, δ зависит только от ε и является общим для всех x', x'' промежутка X . Из определения очевидно, что равномерно-непрерывная функция на X является непрерывной на этом промежутке.

Следующая теорема устанавливает условие, при котором непрерывная функция является и равномерно-непрерывной.

6. Теорема о равномерной непрерывности функции. Теорема 4.13 (теорема Кантора)*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и равномерно-непрерывна на нем.

Доказательство. Докажем сначала, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков, любые два из которых или не имеют общих точек, или имеют только одну общую граничную точку и на каждом из которых для любых двух точек x', x'' будет выполняться неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Предположим обратное, т. е. допустим, что существует $\varepsilon > 0$, для которого такое разбиение отрезка $[a, b]$ невозможно. Разделим $[a, b]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, для которого такое разбиение невозможно. Обозначим его $[a_1, b_1]$. Разделим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот из полученных двух отрезков, для которого такое разбиение невозможно, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

* Кантор Георг (1845—1918) — немецкий математик, основатель современной теории множеств.

обладающих тем свойством, что ни один из них нельзя разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых для любых двух точек x' и x'' будет выполняться неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c , принадлежащая всем отрезкам. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке c , то для рассматриваемого ε найдется δ такое, что $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$ для любого x из δ -окрестности точки c . Тогда для любых двух точек x' и x'' δ -окрестности точки c будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= |(f(x'') - f(c)) + (f(c) - f(x'))| \leq \\ &\leq |f(x'') - f(c)| + |f(c) - f(x')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

В δ -окрестность точки c при достаточно большом n попадет отрезок $[a_n, b_n]$, и, следовательно, для любых двух точек x' и x'' этого отрезка справедливо неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, а это противоречит выбору последовательности вложенных отрезков.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. По только что доказанному для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $[a, b]$ на конечное число отрезков, в каждом из которых разность между любыми двумя значениями функции $f(x)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon/2$. Обозначим через δ длину

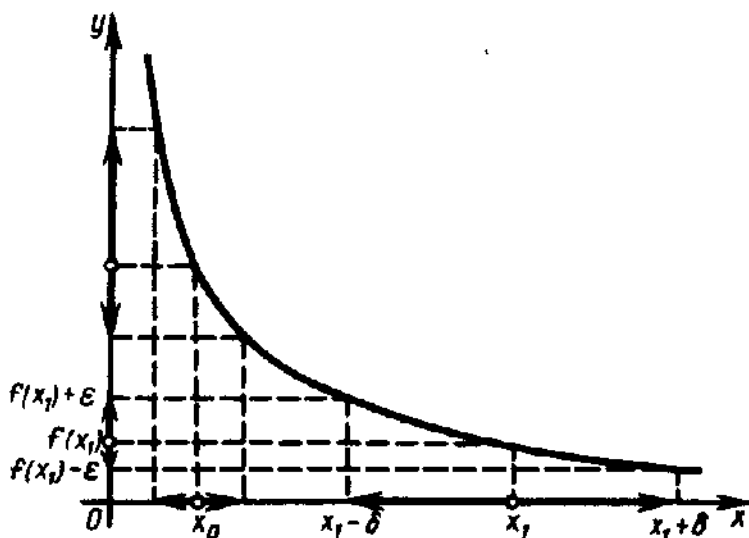


Рис. 60

наименьшего из отрезков разбиения и рассмотрим любые две точки x' и x'' отрезка $[a, b]$, отстоящие друг от друга меньше, чем на δ , т. е. $|x'' - x'| < \delta$. Возможны два случая: 1) точки x' и x'' принадлежат одному отрезку разбиения; 2) точки x' и x'' принадлежат двум соседним отрезкам разбиения. В первом случае $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2 < \varepsilon$; во втором случае, обозначая через x_0 общую граничную точку соседних отрезков, имеем

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= |(f(x'') - f(x_0)) + (f(x_0) - f(x'))| \leq \\ &\leq |f(x'') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если

$[a, b]$ произвольно разбить на конечное число отрезков с длинами, меньшими δ , то на каждом из них колебание ω функции $f(x)$ будет меньше ε .

Доказательство. Действительно, по доказанной теореме функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на конечное число отрезков с длинами, меньшими указанного δ . Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, на каждом из частичных отрезков можно указать такие точки x' и x'' , что $f(x') = m$, а $f(x'') = M$, где m и M — точные нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на данном частичном отрезке. Так как $|x'' - x'| < \delta$, то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Но $f(x'') - f(x') = M - m = \omega$, поэтому $\omega < \varepsilon$. ■

З а м е ч а н и е. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом или полуинтервалом.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$. Данная функция непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно-непрерывной на нем. Это следует из того, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, какое бы $\delta > 0$ мы не взяли, всегда найдутся точки x' и x'' , достаточно близкие к нулю, расстояние между которыми меньше δ , а модуль разности $|f(x'') - f(x')|$ больше ε (рис. 60).

§ 11. Понятие сложной функции

Определение. Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z , а на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией* от x , а переменная z — промежуточной переменной сложной функции.

Пример. Функция $y = \sin x^2$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как $y = f(z) = \sin z$, $z = \varphi(x) = x^2$.

Теорема 4.14. Пусть функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Возьмем из X любую последовательность точек

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

сходящуюся к точке x_0 . Тогда в силу непрерывности функции

$z = \varphi(x)$ в точке x_0 имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = z_0$, т. е.

*Наряду с термином «сложная функция» используют равнозначный термин «композиция (или суперпозиция) функций».

соответствующая последовательность точек

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

сходится к точке z_0 . В силу же непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(x_0)]$. Следовательно, предел функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 равен ее значению в этой точке, что и доказывает непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 . ■

Пример. Доказать непрерывность функции $y = \sin x^2$ в точке $x=0$.

Решение. Функция $z=x^2$ непрерывна в точке $x=0$, а функция $y=\sin z$ непрерывна в точке $z=0$, поэтому по доказанной теореме сложная функция $y=\sin x^2$ непрерывна в точке $x=0$.

§ 12. Понятие обратной функции

1. Определение обратной функции. Будем говорить, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на множестве X , если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Неубывающие и невозрастающие функции объединяют общим названием *монотонные функции*.

Если для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X . Возрастающие и убывающие функции называются также *строго монотонными*.

Примеры. 1. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ является неубывающей на всей числовой прямой.

2. Функция $f(x) = x$ является возрастающей на всей числовой прямой.

Введем теперь понятие обратной функции.

Определение. Пусть X и Y — некоторые множества и пусть задана функция f , т. е. множество пар чисел $(x; y)$ ($x \in X, y \in Y$), в котором каждое число x входит в одну и только одну пару, а каждое число y , — по крайней мере, в одну пару. Если в каждой паре этого множества числа x и y поменять местами, то получим множество пар чисел $(y; x)$, которое называется *обратной функцией* φ к функции f .

Обратную функцию будем обозначать символом $x = \varphi(y)$.

Отметим, что обратная функция, вообще говоря, не является функцией, так как каждое число y может входить не только в одну, но и в несколько пар. Так, например, для функции $y=x$ обратная функция $x=y$ — однозначна (каждое число y входит в одну пару), для функции $y=x^2$ обратная функция $x=\pm\sqrt{y}$ — двузначна (каждое число y входит в две пары), а обратная функция $x=\operatorname{Arcsin} y$ для функции $y=\sin x$ — многозначна (каждое число y

входит в бесконечное число пар). Геометрически данный факт очевиден.

Из определения следует, что если обратная функция однозначна, т. е. является функцией в обычном смысле, то множество значений Y функции f является областью определения обратной функции φ , а область определения X функции f — множеством значений обратной функции φ . Пусть, например, функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, отрезок $[\alpha, \beta]$ является множеством ее значений и каждое $y \in [\alpha, \beta]$ соответствует ровно одному x из $[a, b]$. Тогда, по определению, на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, множеством значений которой служит отрезок $[a, b]$ (рис. 61).

Таким образом, функция $y=f(x)$ и обратная функция $x=\varphi(y)$ имеют один и тот же график. Так, например, функция $y=5x$ и обратная функция $x=1/5y$ изображаются графически одной прямой.

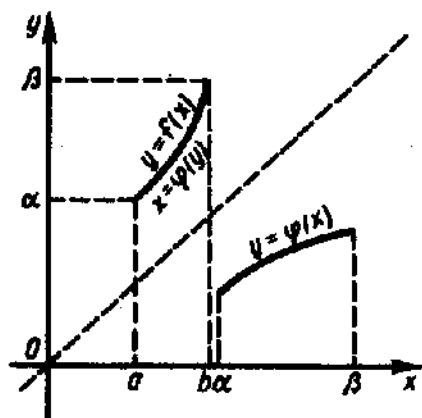


Рис. 61

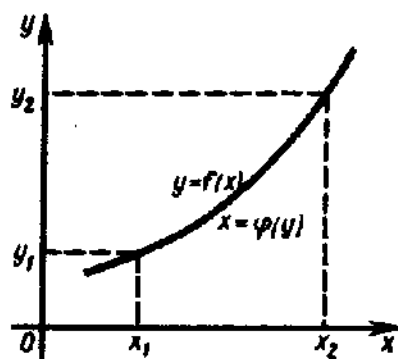


Рис. 62

Если оси Ox и Oy поменять местами, для чего следует повернуть в пространстве плоскость Oxy вокруг биссектрисы первого координатного угла на 180° , то новое положение графика обратной функции $x=\varphi(y)$ является графиком обратной функции $y=\varphi(x)$ (рис. 61).

2. Теорема о непрерывности обратной функции. Т е о р е м а 4.15. Пусть функция $y=f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке X и пусть Y — множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x=\varphi(y)$ однозначна, строго монотонна и непрерывна.

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ возрастает на X , т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $y_1 < y_2$ ($y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$) (рис. 62).

Однозначность обратной функции $x=\varphi(y)$ следует из того, что в силу возрастания функции $y=f(x)$ на X справедливо неравенство $y_1=f(x_1) \neq f(x_2)=y_2$ при $x_1 \neq x_2$ и, значит, каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$.

Докажем теперь, что обратная функция $x=\varphi(y)$ возрастает на Y . Действительно, если $y_1 < y_2$, то и $x_1 < x_2$ ($x_1=\varphi(y_1)$ и $x_2=\varphi(y_2)$).

$=\varphi(y_2)$), так как если бы было $x_1 \geq x_2$, то из возрастания $f(x)$ следовало бы, что $y_1 \geq y_2$, что противоречило бы предположению $y_1 < y_2$. Таким образом, факт строгой монотонности обратной функции $x = \varphi(y)$ установлен.

И наконец, покажем, что обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна на Y . Согласно следствию теоремы 4.10 множество Y является промежутком с концами m и M , где $m = \inf_x f(x)$, $M = \sup_x f(x)$. Пусть $y_0 \in Y$, $x_0 = \varphi(y_0)$. Рассмотрим сначала случай, когда $m < y_0 < M$ (рис. 63). В этом случае точка x_0 является, очевидно, внутренней точкой промежутка X . Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $(x_0 - \varepsilon) \in X$ и $(x_0 + \varepsilon) \in X$, и положим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ и $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда в силу возрастания $f(x)$ получим

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

Возьмем теперь $\delta > 0$ таким, чтобы выполнялись неравенства

$$y_1 \leq y_0 - \delta \text{ и } y_0 + \delta \leq y_2.$$

Тогда, если y удовлетворяет неравенствам

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

то

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу возрастания $\varphi(y)$ имеем

$$\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2).$$

Учитывая, что $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0) - \varepsilon$ и $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$, получаем: $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$ при условии $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$.

Таким образом, доказано что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех y , удовлетворяющих неравенству $|y - y_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, т. е. обратная функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0 . Но y_0 — произвольная точка интервала (m, M) . Значит, обратная функция $\varphi(y)$ непрерывна на (m, M) .

Если $m \in Y$ или $M \in Y$, то с помощью аналогичных рассуждений можно доказать непрерывность $\varphi(y)$ справа в точке m и слева в точке M .

Итак, факт непрерывности обратной функции $x = \varphi(y)$ на Y доказан.

В случае убывания функции $f(x)$ доказательство теоремы аналогично. ■

З а м е ч а н и е. Если обратная функция $x = \varphi(y)$ однозначна, то, очевидно, функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = \varphi(y)$. Такие функции называют также *взаимно обратными*.

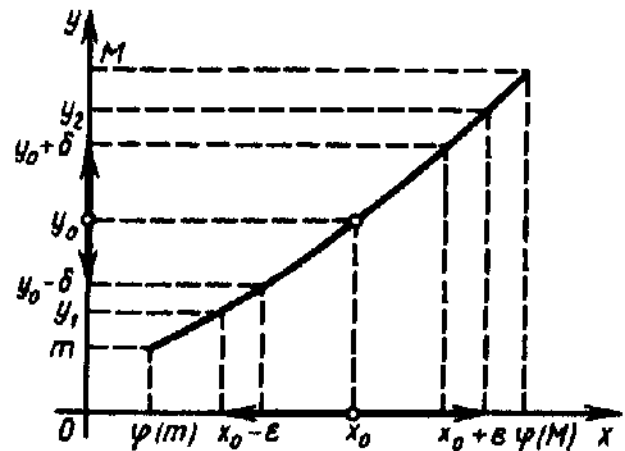


Рис. 63

Пример. Функция $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ возрастает, непрерывна и множеством ее значений является отрезок $[-1, 1]$. По теореме 4.15 на отрезке $[-1, 1]$ существует непрерывная возрастающая обратная функция с множеством значений $[-\pi/2, \pi/2]$.

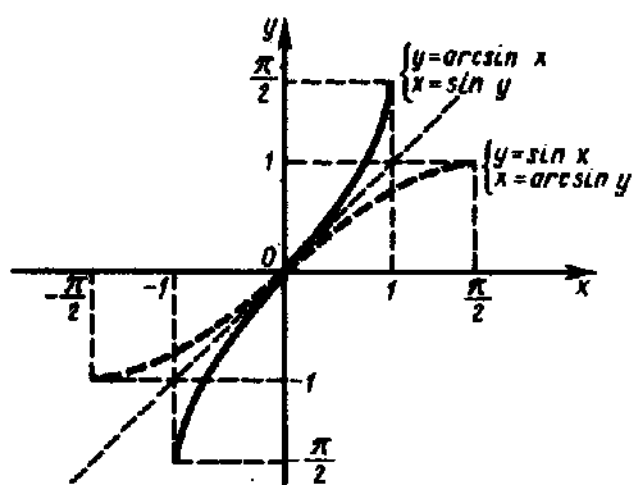


Рис. 64

Эту обратную функцию обозначают $x = \arcsin y$. График ее совпадает с графиком функции $y = \sin x$, рассматриваемой при $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ (рис. 64).

Если теперь x и y поменять местами, т. е. если рассматривать функцию $y = \arcsin x$, то получится график, изображенный на рис. 64 сплошной линией.

ГЛАВА 5

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Понятие производной

1. Определение производной. Пусть на некотором промежутке X определена функция $y = f(x)$. Возьмем любую точку $x_0 \in X$ и зададим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежит X . Функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента (при условии, что этот предел существует).

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используют символы $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad (\text{или} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 функция имеет *бесконечную производную* знака плюс (или знака минус). В отличие от бесконечной производной определенную выше производную функции иногда называют *конечной производной*. Если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in X$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x , также определенную на X .

Из определения производной вытекает и способ ее вычисления.

Пример. Найти производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x = x_0$.

Решение. Давая аргументу x в точке x_0 приращение Δx , найдем соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 равна числу $2x_0$, что в принятых обозначениях можно записать так: $f'(x_0) = 2x_0$.

2. Геометрический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и пусть точка M на графике функции соответствует значению аргумента x_0 , а точка P — значению $x_0 + \Delta x$. Проведем через точки M и P прямую и назовем ее *секущей*. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол между секущей и осью Ox (рис. 65). Очевидно, что этот угол зависит от Δx .

Если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то прямую с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, проходящую через точку $M(x_0; f(x_0))$, называют *предельным положением секущей MP при $\Delta x \rightarrow 0$ (или при $P \rightarrow M$)*.

Определение. Касательной S к графику функции $y = f(x)$ в точке M будем называть предельное положение секущей MP при $\Delta x \rightarrow 0$, или, что то же, при $P \rightarrow M$.

Из определения следует, что для существования касательной достаточно, чтобы существовал предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, причем предел φ_0 равен углу наклона касательной к оси Ox .

Докажем, что если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$, причем угловой коэффициент этой касательной (т. е. тангенс угла наклона ее к оси Ox) равен производной $f'(x_0)$.

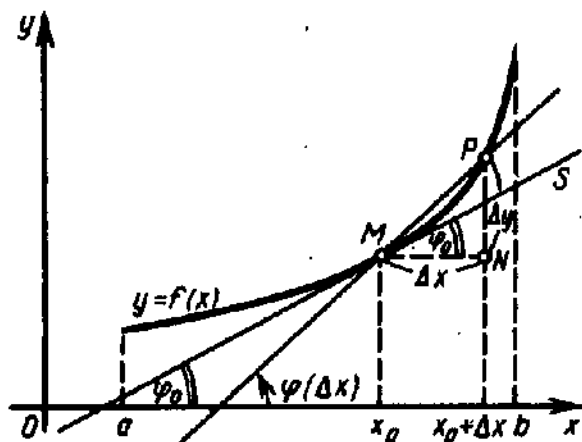


Рис. 65

Действительно, из треугольника MNP получаем, что

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

Перейдем в равенстве (1) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как существует производная $f'(x_0)$, то существует и предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отсюда и из непрерывности функции $\operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что существует предел правой части равенства (1):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Следовательно, существует предел и левой части равенства (1). Таким образом, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Но это и означает, что существует предельное положение секущей MP , т. е. существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$, причем угол наклона φ_0 этой касательной к оси Ox равен $\operatorname{arctg} f'(x_0)$ и, значит, угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0)$, что и требовалось доказать.

Итак, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$.

3. Физический смысл производной. Предположим, что функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки M по прямой линии, т. е. $y = f(x)$ — путь, пройденный точкой M от начала отсчета за время x .

Тогда за время x_0 пройден путь $y = f(x_0)$, а за время x_1 — путь $y = f(x_1)$. За промежуток времени $\Delta x = x_1 - x_0$ точка M пройдет отрезок пути $\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 66).

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* движения ($v_{\text{ср}}$) за время

Δx , а предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени x_0 ($v_{\text{мгн}}$).

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения произвольной функции. Какую бы зависимость ни отражала функция $y = f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения y относительно изменения x , а $y'(x_0)$ — мгновенная скорость изменения y при $x = x_0$.

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

4. Правая и левая производные. Используя понятие правого и левого предела функции, введем понятия правой и левой производных функции $y=f(x)$ в точке x_0 .

Определение. Правой (левой) производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется правый (левый) предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (при условии, что этот предел существует).

Обозначение:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она имеет в этой точке правую и левую производные, которые совпадают.

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 правую и левую производные, но не имеющие производной в этой точке. Это, например, функция $f(x)=|x|$, которая имеет в точке $x=0$ правую производную, рав-

ную $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ (при $x \geq 0$ $\Delta y = \Delta x$), и левую производную,

равную $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$

(при $x < 0$ $\Delta y = -\Delta x$), но не имеет в этой точке производной, так как $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

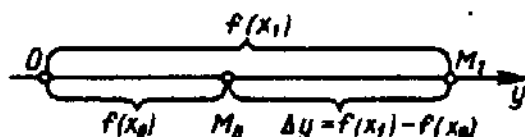


Рис. 66

§ 2. Понятие дифференцируемости функции

1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке. Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx , а $\alpha(\Delta x)$ — функция аргумента Δx , являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Установим связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 5.1. Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , т. е. ее приращение в этой точке можно представить в виде (1): $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Поде-

лив это равенство на Δx (при $\Delta x \neq 0$), получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Отсюда следует, что производная в точке x_0 существует и равна A : $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x_0)$, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Пусть $f'(x_0) = A$; тогда функция $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ является бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$ (см. теорему 4.5).

Из последнего равенства имеем

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Получено представление (1), тем самым доказано, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . ■

Таким образом, для функций одной переменной дифференцируемость и существование производной — понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной часто называют дифференцированием.

З а м е ч а н и е. Введенная при доказательстве достаточности функция $\alpha(\Delta x) = \Delta y / \Delta x - A$ не определена при $\Delta x = 0$. Следовательно, полученное для Δy выражение (1) также не определено при $\Delta x = 0$. Если определить $\alpha(0)$ произвольным образом, то равенство (1) будет справедливо и при $\Delta x = 0$. Для дальнейшего целесообразно условиться, что в выражении (1) функция $\alpha(\Delta x)$ определена при $\Delta x = 0$ по непрерывности, т. е. $\alpha(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.

Т е о р е м а 5.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0 , то она и непрерывна в этой точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ее приращение в этой точке может быть представлено соотношением (1). Тогда, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0,$$

что и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0 согласно третьему определению непрерывности функции в точке. ■

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, т. е. не иметь производной в этой точке.

Примером такой функции служит функция $f(x)=|x|$, которая непрерывна в точке $x=0$, но, как показано в п. 4, § 1, не имеет в этой точке производной, т. е. не является дифференцируемой.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то будем говорить, что функция $f(x)$ дифференцируема на указанном промежутке.

§ 3. Понятие дифференциала

1. Определение и геометрический смысл дифференциала. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , т. е. ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Слагаемое $A\Delta x$ является при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой одного порядка с Δx (при $A \neq 0$), оно линейно относительно Δx . Слагаемое $\alpha(\Delta x) \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = 0$).

Таким образом, первое слагаемое (при $A \neq 0$) является главной частью приращения функции $y=f(x)$.

Определение. Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции в этой точке:

$$dy = A\Delta x. \quad (1)$$

Если $A=0$, то $A\Delta x=0$, и поэтому слагаемое $A\Delta x$ уже не является главной частью приращения Δy , так как слагаемое $\alpha(\Delta x) \Delta x$, вообще говоря, отлично от нуля. Однако и в этом случае по определению полагаем дифференциал функции в точке x_0 равным $A\Delta x$, т. е. здесь $dy=0$.

Принимая во внимание теорему 5.1, т. е. учитывая, что $A=f'(x_0)$, формулу (1) можно записать в виде

$$dy = f'(x_0) \Delta x. \quad (2)$$

Пусть $f(x)=x$. Тогда по формуле (2)

$$dy = dx = (x_0)' \Delta x = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} \right) \Delta x = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Дифференциалом независимой переменной x назовем приращение этой переменной $dx = \Delta x$. Соотношение (2) принимает теперь вид

$$dy = f'(x_0) dx. \quad (3)$$

Заметим, что с помощью равенства (3) производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу dx независимой переменной, т. е.

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции имеет геометрический смысл. Пусть точка M на графике функции $y=f(x)$ соответствует значению аргумента x_0 , точка P — значению аргумента $x_0 + \Delta x$, прямая MS — касательная к графику $y=f(x)$ в точке M , α — угол между касательной и осью Ox . Пусть, далее $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q — точка пересечения касательной MS с прямой PN (рис. 67). Тогда приращение функции Δy равно величине отрезка NP . В то же время из прямоугольного треугольника MNQ получаем: $NQ = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \Delta x = dy$, т. е. дифференциал функции dy равен величине отрезка NQ . Из геометрического рассмотрения видно, что величины отрезков NP и NQ различны.

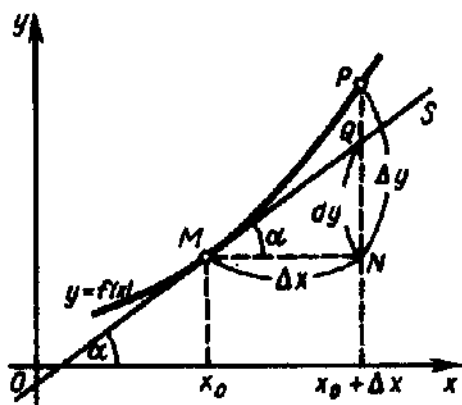


Рис. 67

Таким образом, дифференциал dy функции $y=f(x)$ в точке x_0 равен приращению «ординаты касательной» MS к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$, а приращение функции Δy есть приращение «ординаты самой функции» $y=f(x)$ в точке x_0 , соответствующее приращению аргумента, равному Δx .

2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Из определения дифференциала следует, что он зависит

линейно от Δx и является главной частью приращения функции Δy . Само же Δy зависит от Δx более сложно. Например, если $f(x) = x^3$, то $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, в то время как

$$dy = f'(x_0) \Delta x = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \right) \Delta x = 3x_0^2 \Delta x.$$

Во многих задачах приращение функции в данной точке приближенно заменяют дифференциалом функции в этой точке:

$$\Delta y \approx dy.$$

Абсолютная погрешность при такой замене равна $|\Delta y - dy|$ и является при $\Delta x \rightarrow 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx .

Пример. Покажем, что если α мало, то можно использовать приближенную формулу

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. При малых Δx имеем

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \approx dy, \text{ или } \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \approx \\ &\approx (\sqrt{x})' \Big|_{x=x_0} \Delta x = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \right) \Delta x = \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \right) \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \Delta x, \end{aligned}$$

откуда, положив $x_0 = 1$, $\Delta x = \alpha$, получим

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2.$$

В частности, $\sqrt{1,0003} \approx 1,00015$ при $\alpha = 0,0003$.

Установим теперь правила дифференцирования и вычисления производных простейших элементарных функций. Заметим только, что при выводе формул и практическом вычислении производных обычно пишут не x_0 , а просто x , но при этом x считают фиксированным.

§ 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема 5.3. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x , то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', (u \cdot v)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (1)$$

Доказательство. Для вывода формул (1) воспользуемся определением производной, равенством $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$ и теоремой 4.3. Тогда получим:

$$\begin{aligned} (u \pm v)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'; \\ (uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)v(x) + \Delta uv(x) + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = \\ &= v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= vu' + uv' + 0 \cdot u' = u'v + uv'. \end{aligned}$$

так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$, а множители u и v не зависят от Δx ;

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x)v(x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x) + \Delta u]v(x) - u(x)[v(x) + \Delta v]}{\Delta x v(x)[v(x) + \Delta v]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{\Delta x v(v + \Delta v)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

§ 5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции

1. Производная постоянной функции. Производная функции $y = f(x) = C$, где C — постоянное число, выражается формулой

$$y' = 0.$$

Доказательство. Для любых x и Δx имеем $f(x + \Delta x) = C$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ при любом $\Delta x \neq 0$ и, следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. \blacksquare$$

2. Производная степенной функции. Производная функции $y = x^n$, показатель n которой является целым положительным числом, выражается формулой

$$y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона, можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = \\ &= \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \right] - x^n = \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^2 = 0$, ..., $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} = 0$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Случай степенной функции, показатель которой является любым вещественным числом, рассмотрен в п. 2, § 9.

3. Производные тригонометрических функций.

1) Производная функции $y = \sin x$ выражается формулой

$$y' = \cos x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cos(x + \Delta x/2).$$

Так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = 1$ (первый замечательный предел),

а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x$ в силу непрерывности функции $\cos x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x. \blacksquare$$

2) Производная функции $y = \cos x$ выражается формулой

$$y' = -\sin x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin(\Delta x/2) \sin(x + \Delta x/2).$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2 \sin(\Delta x/2) \sin(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \sin(x + \Delta x/2).$$

Так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \sin x$ в силу непрерывности функции $\sin x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x. \blacksquare$$

3) Производная функции $y = \operatorname{tg} x$ выражается формулой

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, то по теореме 5.3 получим

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

следовательно,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

4) Производная функции $y = \operatorname{ctg} x$ выражается формулой

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq n\pi).$$

Доказательство. Так как $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$, то аналогично предыдущему имеем

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x) \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x},$$

следовательно,

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \blacksquare$$

4. Производная логарифмической функции. Производная функции $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) выражается формулой

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Таким образом, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \text{ или}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right].$$

Полагая $x/\Delta x = h$, имеем: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \Delta x/x\right)^{x/\Delta x} = \lim_{h \rightarrow \infty} (1 + 1/h)^h = e$ (второй замечательный предел), а так как логарифмическая функция является непрерывной, то

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \right] = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \blacksquare$$

Следствие. Если $y = \log_e x = \ln x$, то $y' = (\ln x)' = 1/x$.

§ 6. Теорема о производной обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.15 об обратной функции и функция $x = \varphi(y)$ является для нее обратной. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 5.4. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ производную, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Дадим аргументу y обратной функции $x = \varphi(y)$ некоторое приращение $\Delta y \neq 0$ в точке y_0 . Функция

$x = \varphi(y)$ получит некоторое приращение Δx , причем в силу возрастания (или убывания) обратной функции $\Delta x \neq 0$. Следовательно, можем записать:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$. Так как обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке y_0 (см. теорему 4.15), то $\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta y \rightarrow 0$. Но при $\Delta x \rightarrow 0$ предел правой части равенства существует и равен $1/f'(x_0)$. Следовательно, существует предел и левой части равенства, который по определению равен $\varphi'(y_0)$. Таким образом, получаем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacksquare \quad (1)$$

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$ (или обратной функции $x = \varphi(y)$). Пусть точке x_0 на этом графике соответствует точка M (рис. 68). Как известно, производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла α наклона касательной, проходящей через точку M , к оси Ox . Производная обратной функции $\varphi'(y_0)$ равна тангенсу угла β наклона той же касательной к оси Oy . Поскольку углы α и β в сумме составляют $\pi/2$, то формула (1) выражает очевидный факт:

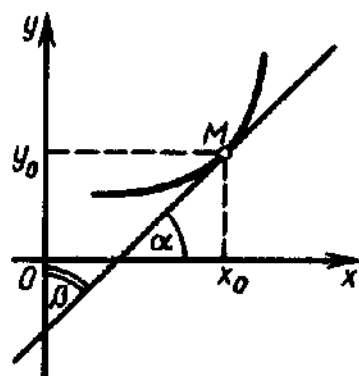


Рис. 68

$$\varphi'(y_0) = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

§ 7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций

Используя доказанную выше теорему 5.4, продолжим вычисление производных простейших элементарных функций.

1. Производная показательной функции. Производная функции $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) выражается формулой

$$y' = a^x \ln a.$$

Доказательство. Показательная функция $y = a^x$ является обратной для логарифмической функции $x = \log_a y$. Так как

$$x'(y) = \frac{1}{y} \log_a e,$$

то в силу теоремы 5.4 о производной обратной функции и известного из элементарной математики соотношения $\log_a b = 1/\log_b a$

получаем

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a. \blacksquare$$

С л е д с т в и е. Если $y=e^x$, то $y'=(e^x)'=e^x$.

2. Производные обратных тригонометрических функций.

1) Производная функции $y=\arcsin x$ выражается формулой

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $y=\arcsin x$ является обратной для функции $x=\sin y$. Так как $x'(y)=\cos y$, то по теореме 5.4 о производной обратной функции получаем

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Корень взят со знаком плюс, так как $\cos y$ положителен на интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Учитывая, что $\sin y=x$ окончательно имеем

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacksquare$$

2) Производная функции $y=\arccos x$ выражается формулой

$$y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

3) Производная функции $y=\operatorname{arctg} x$ выражается формулой

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x=\operatorname{tg} y$.

Так как $x'(y)=1/\cos^2 y$, то $y'(x)=1/x'(y)=\cos^2 y$. Но $1/\cos^2 y=1+\operatorname{tg}^2 y=1+x^2$, следовательно,

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \blacksquare$$

4) Производная функции $y=\operatorname{arcctg} x$ выражается формулой

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

§ 8. Правило дифференцирования сложной функции

Т е о р е м а 5.5. Если функция $x=\varphi(t)$ имеет производную в точке t_0 , а функция $y=f(x)$ имеет производную в соответствующей точке $x_0=\varphi(t_0)$, то сложная функция $f[\varphi(t)]$ имеет произ-

водную в точке t_0 и справедлива следующая формула:

$$y'(t_0) = f'(x_0) \varphi'(t_0). \quad (1)$$

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то приращение этой функции в точке x_0 может быть записано в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x, \quad (2)$$

где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Поделив равенство (2) на Δt , получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3)$$

Равенство (3) справедливо при любых достаточно малых Δx . Возьмем Δx равным приращению функции $x=\varphi(t)$, соответствующему приращению Δt аргумента t в точке t_0 , и устремим в этом равенстве Δt к нулю. Так как по условию функция $x=\varphi(t)$ имеет в точке t_0 производную, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, согласно третьему определению непрерывности функции в точке, $\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Но тогда и $\alpha(\Delta x)$ также стремится к нулю, т. е. имеем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \cdot \varphi'(t_0) = 0. \quad (4)$$

В силу соотношения (4) существует предел правой части равенства (3) при $\Delta t \rightarrow 0$, равный $f'(x_0) \varphi'(t_0)$. Значит, существует предел при $\Delta t \rightarrow 0$ и левой части равенства (3), который, по определению производной, равен производной сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ в точке t_0 . Тем самым, доказана дифференцируемость сложной функции и установлена формула (1). ■

З а м е ч а н и е 1. В данной теореме рассмотрена сложная функция, где y зависит от t через промежуточную переменную x . Возможна и более сложная зависимость — с двумя, тремя и большим числом промежуточных переменных, но правило дифференцирования остается таким же.

Так, например, если $y=f(x)$, где $x=\varphi(u)$, а $u=\psi(v)$ и $v=\chi(t)$, то производную $y'(t)$ следует вычислять по формуле

$$y'(t) = f'(x) \varphi'(u) \psi'(v) \chi'(t). \quad (5)$$

Пример 1. Вычислить производную функции $y=e^{\operatorname{arctg} x}$.

Р е ш е н и е. Данную функцию можно представить в виде $y=e^u$, где $u=\operatorname{arctg} x$. Тогда по формуле (1)

$$y'(x) = y'(u) u'(x) = e^u \frac{1}{1+x^2}.$$

Заменяя u на $\operatorname{arctg} x$, окончательно получим

$$y' = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y=\operatorname{tg}^2 \sqrt{x^2+1}$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u^2$, где $u = \operatorname{tg} v$, а $v = \sqrt{w}$ и $w = x^2 + 1$. Используя формулу (5), получаем

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(u) u'(v) v'(w) w'(x) = (u^2)' (\operatorname{tg} v)' (\sqrt{w})' (x^2 + 1)' = \\ &= 2u \sec^2 v \frac{1}{2\sqrt{w}} 2x = \frac{2x \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + 1} \sec^2 \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Замечание 2. Иногда производную приходится вычислять непосредственно исходя из ее определения. Найдем, например, производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$ производная вычисляется по формулам и правилам дифференцирования:

$$f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\sin \frac{1}{x}\right)' \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Этим выражением нельзя воспользоваться при $x = 0$. В точке $x = 0$ производную можно вычислить, используя определение производной:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$$

(произведение бесконечно малой функции на ограниченную есть бесконечно малая). Таким образом,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

§ 9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций

1. Понятие логарифмической производной функции. Вычислим производную функции $y = \ln |x|$ ($x \neq 0$). Так как $(\ln x)' = 1/x$ и $(\ln(-x))' = (-x)' / -x = 1/x$ (последнее равенство получено на основании правила дифференцирования сложной функции), то производная данной функции выражается следующей формулой:

$$y' = (\ln |x|)' = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Учитывая формулу (1), вычислим производную сложной функции $y = \ln |u|$, где $u = f(x)$ — дифференцируемая функция. Имеем

$$y' = (\ln |u|)' = \frac{1}{u} u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

или

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (2)$$

Производная $(\ln |f(x)|)'$ называется *логарифмической производной* функции $f(x)$. Для упрощения записи при логарифмическом дифференцировании знак модуля у функции $f(x)$ обычно опускается.

Вычислим с помощью логарифмической производной производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где u и v — некоторые функции от x ($u > 0$), имеющие в данной точке x производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Так как $\ln y = v(x) \ln u(x)$, то, используя формулу (2), получаем

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Отсюда, учитывая, что $y = u(x)^{v(x)}$, получаем следующую формулу для производной показательно-степенной функции:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \quad (3)$$

Пример. Вычислить производную функции $y = x^x$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x) = x$ и $v(x) = x$. Используя формулу (3), получаем

$$y' = x^x \left[1 \ln x + x \frac{1}{x} \right] = x^x (\ln x + 1).$$

Производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$ можно вычислить и другим способом. Представим функцию в виде $y = e^{v(x) \ln u(x)}$ и вычислим y' :

$$\begin{aligned} y' &= [e^{v(x) \ln u(x)}]' = e^{v(x) \ln u(x)} [v(x) \ln u(x)]' = \\ &= y \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right], \end{aligned}$$

подставляя $y = u(x)^{v(x)}$, приходим снова к формуле (3).

Логарифмическая производная очень удобна при нахождении производной степенной функции с любым вещественным показателем.

2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Производная функции $y = x^\alpha$ (α — любое вещественное число) выражается формулой

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Так как $y = x^\alpha$, то $\ln y = \alpha \ln x$. По формуле (2) находим

$$\frac{y'}{y} = [\alpha \ln x]' = \frac{\alpha}{x}.$$

Отсюда, учитывая, что $y = x^\alpha$, получаем формулу для производной степенной функции:

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \blacksquare$$

Таким образом, нами вычислены производные всех простейших элементарных функций и мы можем составить следующую таблицу.

3. Таблица производных простейших элементарных функций.

I. $(C)' = 0$.

II. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

IV. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

V. $(\sin x)' = \cos x$.

VI. $(\cos x)' = -\sin x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Формулы, приведенные в таблице, а также правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правило дифференцирования сложной функции являются основными формулами дифференциального исчисления. На основе правил и формул дифференцирования можно сделать важный вывод: производная любой элементарной функции также элементарная функция. Таким образом, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Понятие производной n -го порядка. Как уже отмечалось в § 1 данной главы, производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является некоторой функцией аргумента x . Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовем $f'(x)$ *производной первого порядка* функции $f(x)$.

Производная от производной некоторой функции называется *производной второго порядка* (или *второй производной*) этой функции. Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* (или *третьей производной*) и т. д. Производные, начиная со второй, называются *производными высших порядков* и

обозначаются $y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots$ (вместо y'' и y''' иногда пишут $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$), или $f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$

Производная n -го порядка является производной от производной $(n-1)$ -го порядка, т. е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Ограничимся физическим истолкованием второй производной $f''(x)$. Если функция $y=f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x , а вторая производная равна скорости изменения скорости, т. е. ускорению движущейся точки в этот момент.

2. Формулы для n -х производных некоторых функций.

1) Вычислим n -ю производную степенной функции $y=x^\alpha$ ($x>0$) (α — любое вещественное число). Последовательно дифференцируя, имеем*:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \dots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots [\alpha-(n-1)] x^{\alpha-n}.$$

В частном случае, если $\alpha=m$, где m — натуральное число, получаем

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2) \dots [m-(m-1)] \cdot 1 = m!, \\ (x^m)^{(n)} = 0 \text{ при } n > m.$$

2) Вычислим n -ю производную показательной функции $y=a^x$ ($0 < a \neq 1$). Последовательно дифференцируя, имеем

$$y' = a^x \ln a, y^{(2)} = a^x (\ln a)^2, y^{(3)} = a^x (\ln a)^3, \dots, y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

В частности, если $y=e^x$, то для любого n

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3) Вычислим n -ю производную функции $y=\sin x$. Последовательно дифференцируя, имеем

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), y^{(2)} = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\ y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \dots, y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, производную любого порядка от $\sin x$ можно вычислять по формуле

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Например, $(\sin x)^{(10)} = \sin(x + 10(\pi/2)) = \sin(x + \pi) = -\sin x$.

4) Аналогично можно получить формулу n -й производной функции $y=\cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

*При строгом выводе формул n -х производных следует применить метод математической индукции.

3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций. Пусть $y = u \cdot v$, где u и v — некоторые функции от переменной x , имеющие производные любого порядка. Тогда

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \quad y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = \\ &= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v + 2u^{(1)}v' + uv^{(2)}, \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v + 3u^{(2)}v' + 3u^{(1)}v^{(2)} + uv^{(3)}. \end{aligned}$$

Правые части полученных равенств похожи на разложения различных степеней бинома $(u+v)^n$ по формуле Ньютона, но вместо показателей степени стоят числа, определяющие порядок производных, а сами функции u и v для полной аналогии с формулой Ньютона нужно рассматривать как «производные нулевого порядка»: $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$. Учитывая это, запишем общий вид n -й производной произведения двух функций:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Лейбница**. Докажем эту формулу методом математической индукции.

При $n=1$ эта формула принимает вид $(uv)' = u'v + uv'$, что совпадает с формулой дифференцирования произведения двух функций. Для $n=2$ и $n=3$ она также проверена. Поэтому достаточно, предположив справедливость формулы (1) для некоторого n , доказать ее справедливость для $n+1$. Продифференцируем эту формулу, т. е. найдем $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + n[u^{(n)}v' + u^{(n-1)}v''] + \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2!}[u^{(n-1)}v'' + u^{(n-2)}v'''] + \\ &\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}[u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}] + \dots \\ &\quad \dots + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + (n+1)u^{(n)}v' + \left(n + \frac{n(n-1)}{2!}\right)u^{(n-1)}v'' + \dots \\ &\dots + \left[\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\right]u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \dots \\ &\quad \dots + (n+1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

*Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646—1716) — немецкий философ и математик.

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)(n-k-2)\dots 1} + \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1} = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) \times}{\times (n-k)(n-k-1)(n-k-2)\dots 1} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{k!}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + (n+1)u^{(n)}v' + \frac{(n+1)n}{2!}u^{(n-1)}v'' + \dots \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!}u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \dots + (n+1)u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Формула (1) доказана. ■

Пример 1. Вычислить пятую производную функции $y = x^5 e^x$.

Решение. Полагая $u = x^5$ и $v = e^x$, найдем: $u' = 5x^4$, $u'' = 20x^3$, $u''' = 60x^2$, $u^{(4)} = 120x$, $u^{(5)} = 120$; $v' = v'' = v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = e^x$. Подставляя эти выражения в формулу (1) при $n=5$, получаем

$$\begin{aligned} y^{(5)} &= 120 e^x + 5 \cdot 120 x e^x + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} 60 x^2 e^x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} 20 x^3 e^x + 5 \cdot 5 x^4 e^x + x^5 e^x = \\ &= e^x (120 + 600x + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5). \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить n -ю производную ($n \geq 2$) функции $y = x^2 \cos x$.

Решение. Полагая $u = \cos x$ и $v = x^2$, найдем

$$u^{(n)} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right), v' = 2x, v'' = 2, v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = \dots = 0.$$

Подставляя в формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) x^2 + 2n \cos \left[x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right] x + \\ &+ \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos \left[x + (n-2) \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

4. Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциалы высших порядков. Для удобства будем наряду с обозначениями дифференциалов символами dy и dx использовать обозначения δy и δx .

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка. Тогда ее дифференциал

$$dy = f'(x) dx,$$

который назовем *дифференциалом первого порядка*, является функцией двух переменных: аргумента x и его дифференциала dx . Пусть функция $f'(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке x . Будем рассматривать dx в выражении для dy как постоянный множитель. Тогда функция dy представляет собой функцию только аргумента x и ее дифференциал в точке x имеет вид (при рассмотрении дифференциала от dy будем использовать новые обозначения для дифференциалов)

$$\delta(dy) = \delta[f'(x) dx] = [f'(x) dx]' \delta x = f''(x) dx \delta x.$$

Дифференциал $\delta(dy)$ от дифференциала dy в точке x , взятый при $\delta x = dx$, называется *дифференциалом второго порядка* функции $f(x)$ в точке x и обозначается d^2y , т. е.

$$d^2y = f''(x) (dx)^2.$$

В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2y)$ от дифференциала d^2y , взятый при $\delta x = dx$, называется *дифференциалом третьего порядка* функции $f(x)$ и обозначается d^3y и т. д. Дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала d^{n-1} , взятый при $\delta x = dx$, называется *дифференциалом n -го порядка* (или *n -м дифференциалом*) функции $f(x)$ и обозначается d^ny .

Докажем, что для n -го дифференциала функции справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}(x) (dx)^n, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Доказательство проведем по индукции. Для $n=1$ и $n=2$ формула (2) доказана. Пусть она верна для дифференциалов порядка $n-1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}(x) (dx)^{n-1},$$

и функция $y^{(n-1)}(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке x . Тогда

$$\begin{aligned} d^ny &= \delta(d^{n-1}y) = \delta[y^{(n-1)}(x) (dx)^{n-1}] = \\ &= [y^{(n-1)}(x) (dx)^{n-1}]' \delta x = y^{(n)}(x) \delta x (dx)^{n-1}. \end{aligned}$$

Полагая $\delta x = dx$, получаем

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y) \Big|_{\delta x = dx} = y^{(n)}(x) (dx)^n,$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (2) следует, что для любого n справедливо равенство

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}, \text{ или } y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

т. е. n -я производная функции $y=f(x)$ в точке x равна отношению n -го дифференциала этой функции в точке x к n -й степени дифференциала аргумента.

Пример 3. Вычислить дифференциал d^3y функции $y=x^4-3x^2+4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, y''(x) = 12x^2 - 6, y'''(x) = 24x.$$

Следовательно, $d^3y = y'''(x)(dx)^3 = 24x(dx)^3$.

§ 11. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование

1. Параметрическое задание функции. Пусть даны две функции

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (1)$$

одной независимой переменной t , определенные и непрерывные в одном и том же промежутке. Если $x=\varphi(t)$ строго монотонна, то обратная к ней функция $t=\Phi(x)$ однозначна, также непрерывна и строго монотонна. Поэтому y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t , называемой *параметром*:

$$y = \psi[\Phi(x)].$$

В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически с помощью уравнений (1).

Отметим, что функция $\psi[\Phi(x)]$ непрерывна в силу теоремы о непрерывности сложной функции.

Пример 1. Пусть $x=R \cos t$, $y=R \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$). Так как функция $x=R \cos t$ убывает при $0 \leq t \leq \pi$, то данные уравнения задают параметрически функцию y от x . Если выразить t через x из первого уравнения и подставить во второе, то получим искомую функцию переменной x в явном виде.

Это еще легче сделать, если заметить, что

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2.$$

Отсюда $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ или $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Так как функция $y = R \sin t$ неотрицательна для $0 \leq t \leq \pi$, то перед радикалом выбираем знак плюс: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Если $\pi \leq t \leq 2\pi$, то $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что когда t изменяется от 0 до 2π , то формулы $x=R \cos t$ и $y=R \sin t$ определяют две функции переменной x , графики которых образуют окружность радиуса R .

Пример 2. Пусть $x=a \cos t$, $y=b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Данные равенства являются параметрическими уравнениями эллипса, так как (см. замечание п. 1, § 7, гл. 3) эллипс получается из окружности радиуса a сжатием ее в a/b раз вдоль оси Oy . Из

примера 1 следует, что параметрическими уравнениями окружности $x^2 + y^2 = a^2$ являются уравнения $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Итак, параметрические уравнения эллипса получаются из параметрических уравнений окружности умножением правой части уравнения для ординаты y на b/a и имеют вид: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Можно поступить проще. Исключая из этих уравнений параметр t (разрешая их относительно $\cos t$ и $\sin t$, возводя полученные равенства в квадрат и складывая), получаем

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \text{ или } x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

— уравнение эллипса.

Параметрическое задание функции имеет особо важное значение при изучении движения точки. Если точка движется на плоскости, то ее координаты x , y являются функциями времени t . Задав эти функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, мы полностью определим движение точки. Для каждого промежутка времени, в котором функция $\varphi(t)$ строго монотонна, можно, как и раньше, определить функцию $y = \psi[\Phi(x)]$, графиком которой является кривая, описываемая за этот промежуток времени движущейся точкой. В последнем примере функции описывали движение точки по эллипсу.

2. Дифференцирование функции, заданной параметрически. Предположим теперь, что функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t) \neq 0$ на некотором промежутке. Из последнего неравенства вытекает (как будет показано) строгая монотонность функции $x = \varphi(t)$ (см. теорему 6.7, гл. VI) и, следовательно, однозначность обратной функции $t = \Phi(x)$. По теореме 5.4 о производной обратной функции функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

а по теореме 5.5 о производной сложной функции функция $y = \psi[\Phi(x)]$ имеет производную

$$y'(x) = \psi'(\Phi(x)) \Phi'(x).$$

Следовательно,

$$y'(x) = \left. \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right|_{t = \Phi(x)}. \quad (2)$$

Таким образом, доказано, что производная функции, заданной параметрически, выражается формулой (2).

Пример 1. Найти $y'(x)$, если $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Решение. По формуле (2) получаем [здесь $t = \Phi(x) = \arccos(x/R)$]

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left. \frac{R \cos t}{-R \sin t} \right|_{t = \arccos(x/R)} = \\ &= - \left. \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} \right|_{t = \arccos(x/R)} = - \frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1 - x^2/R^2}} = - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} (x \neq \pm R). \end{aligned}$$

Если воспользоваться явным выражением для функции y от x : $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то получим, разумеется, тот же результат:

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (x \neq \pm R).$$

Пусть существуют вторые производные функций $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ в некоторой точке t . Тогда можно вычислить вторую производную функции, заданной параметрически. Заметим, что функция

$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi(x)}$, в свою очередь, задана параметрически уравнениями $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \psi_1(t)$ и $x = \varphi(t)$. Следовательно, по формуле (2) имеем

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))'_x = \frac{\psi_1(t)}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi(x)} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi(x)} = \\ &= \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)} \Big|_{t=\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \Big|_{t=\varphi(x)} \end{aligned}$$

Здесь использовано правило дифференцирования частного. Итак,

$$y''(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \Big|_{t=\varphi(x)} \quad (3)$$

Аналогично можно получить производную от y по x любого порядка.

Пример 2. Найти $y''(x)$, если $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Решение. $y'(t) = \cos t$, $y''(t) = -\sin t$; $x'(t) = -\sin t$, $x''(t) = -\cos t$. Подставляя в формулу (3), найдем

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{(-\sin t)(-\sin t) - (-\cos t)(\cos t)}{(-\sin t)^3} \Big|_{t=\arccos x} = \\ &= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{(-\sin t)^3} \Big|_{t=\arccos x} = -\frac{1}{\sin^3 t} \Big|_{t=\arccos x} = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

ГЛАВА 6

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

В предыдущей главе мы познакомились с дифференцированием функций. Рассмотрим теперь методы исследования функции и построение графиков, которые широко используются как в теории, так и на практике.

§ 1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 6.1 (теорема Ферма)*. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в некоторой точке x_0 этого

*Ферма Пьер (1601—1665) — французский математик.

интервала имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ в точке x_0 имеет наибольшее значение, т. е. $f(x) \leq f(x_0)$ для любого $x \in (a, b)$. Это значит, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ для любой точки $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Поэтому, если $\Delta x > 0$ ($x > x_0$), то $\Delta y / \Delta x \leq 0$ и, следовательно,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0,$$

если же $\Delta x < 0$ ($x < x_0$), то $\Delta y / \Delta x \geq 0$ и, следовательно,

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0,$$

т. е. правая производная в точке x_0 неположительная, а левая — неотрицательная. По условию, $f'(x_0)$ существует и, значит, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Это возможно только в случае, когда $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. Но тогда и $f'(x_0) = 0$.

Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет наименьшее значение. ■

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox (рис. 69).

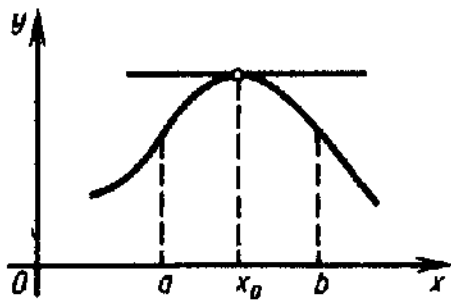


Рис. 69

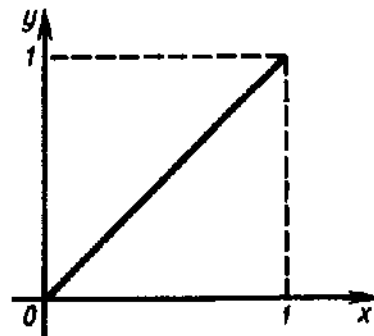


Рис. 70

З а м е ч а н и е. Теорема неверна, если функцию $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a, b]$. Так, например, функция $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ в точке $x=0$ принимает наименьшее, а в точке $x=1$ — наибольшее значение, однако как в той, так и в другой точке производная в нуль не обращается, а равна единице (рис. 70).

Теорема 6.2 (теорема Ролля)*. Пусть на $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1° $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2° $f(x)$ дифференцируема на (a, b) ; 3° $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$

*Ролль Мишель (1652—1719) — французский математик.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она имеет на этом отрезке максимальное значение M и минимальное значение m , т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ и выполняются неравенства

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Возможны два случая: 1) $M = m$; 2) $m < M$.

В первом случае $f(x) = \text{const} = M = m$. Поэтому производная $f'(x)$ равна нулю в любой точке $[a, b]$, и теорема доказана.

Во втором случае так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из двух значений, m или M , не принимается на концах отрезка $[a, b]$, т. е. существует точка $c \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение на интервале (a, b) . В этом случае, так как $f(x)$ дифференцируема в точке c , из теоремы Ферма следует, что $f'(c) = 0$. ■

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри этого отрезка функции, принимающей на его концах равные значения, существует точка $(c; f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 71). На рис. 71 в точке c функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

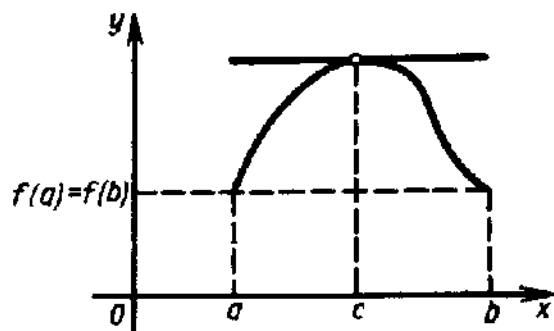


Рис. 71

Следует отметить, что все три условия теоремы Ролля существенны. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два условия теоремы, а третье не выполнялось и производные которых не обращались бы в нуль ни в одной точке. Так, например, функция $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ (см. рис. 70) удовлетворяет условиям 1° и 2°, но не удовлетворяет условию 3° и для нее не существует точки c такой, что $f'(c) = 0$. Рассмотрим еще два примера.

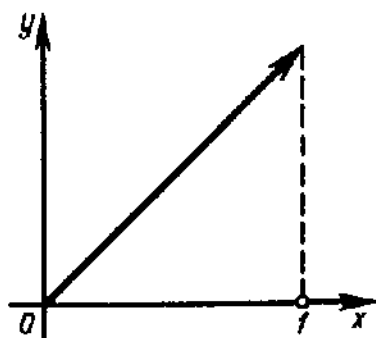


Рис. 72

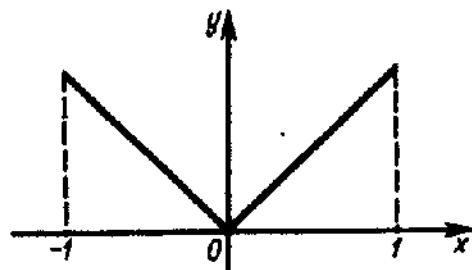


Рис. 73

Функция $f(x)$, равная x , если $0 \leq x < 1$, и равная 0, если $x = 1$ (рис. 72), удовлетворяет условиям 2° и 3°, но не удовлетворяет условию 1°. Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ (рис. 73)

удовлетворяет условиям 1° и 3°, но не удовлетворяет условию 2°. Для этих функций также не существует точки, в которой их производная обращалась бы в нуль.

Отметим, что в математике существенность тех или иных условий доказываемых теорем проверяется построением соответствующих примеров, когда невыполнение того или иного условия теоремы приводит к тому, что утверждение теоремы становится неверным.

Теорема 6.3 (теорема Лагранжа)*. Пусть на $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем: 1°) $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$; 2°) $f(x)$ дифференцируема на (a, b) . Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (как разность двух непрерывных функций $f(x)$ и линейной функции $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$);

2) $F(x)$ дифференцируема на (a, b) , т. е. внутри $[a, b]$ имеет производную, равную $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

3) $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$, т. е. $F(a) = F(b)$.

Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т. е. $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Отсюда получаем:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Установим геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 74). Величина $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $M_1(a; f(a))$ и $M_2(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а $f'(c)$ — угловым коэффициентом касательной к графику в точке $(c; f(c))$. Из теоремы Лагранжа следует, что существует точка c такая, что касательная к графику в точке $(c; f(c))$ параллельна секущей M_1M_2 . Таких точек может быть и несколько, но, по крайней мере, одна всегда существует.

З а м е ч а н и е 1. Равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b, \quad (1)$$

*Лагранж Жозеф-Луи (1736—1813) — французский математик.

называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*.

З а м е ч а н и е 2. Так как точка c лежит между a и b , то $c = a + \theta(b - a)$, где $0 < \theta < 1$. Учитывая это, формулу Лагранжа можно записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

З а м е ч а н и е 3. Если положить $a = x$, $b = x + \Delta x$, то получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Такая запись формулы Лагранжа часто бывает удобнее, чем запись в виде (1).

Как будет показано в дальнейшем, теорема Лагранжа лежит в основе доказательства многих формул и теорем анализа.

Т е о р е м а 6.4 (теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) . Пусть, кроме того, $g'(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что $g(b) \neq g(a)$, т. е. что формула (2) имеет смысл. Действительно, если допустить, что $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля для функции $g(x)$ найдется точка $\xi \in (a, b)$, в которой $g'(\xi) = 0$. А это противоречит условию, что $g'(x) \neq 0$ на (a, b) . Перейдем к доказательству формулы (2).

Рассмотрим на $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

Нетрудно заметить, что $F(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) , и, кроме того, подстановка $x = a$ и $x = b$ дает $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$, т. е. $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля для $F(x)$ существует точка c , $a < c < b$, такая, что $F'(c) = 0$.

Так как $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, то

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Откуда, учитывая, что $g'(c) \neq 0$, получаем формулу (2). ■

З а м е ч а н и е. Формула (2) называется *формулой Коши* или *обобщенной формулой конечных приращений*.

§ 2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталья

1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределенность

вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Раскрыть эту неопределенность — значит вычислить предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 6.5. (теорема Лопиталья)*. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Пусть, далее, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^{**}$ и $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a . Тогда, если существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к точке a , причем $x_n \neq a$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a , положив их равными нулю, т. е. $f(a) = g(a) = 0$. Тогда, очевидно, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, x_n]$, дифференцируемы на (a, x_n) и, по условию, $g'(x) \neq 0$. Таким образом, для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены все условия теоремы Коши на $[a, x_n]$, т. е. внутри $[a, x_n]$ существует точка ξ_n такая, что

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n).$$

По доопределению, $f(a) = g(a) = 0$, следовательно,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n). \quad (1)$$

Пусть теперь в формуле (1) $n \rightarrow \infty$. Тогда, очевидно, $\xi_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ (рис. 75). Так как $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то правая часть формулы (1) имеет при $n \rightarrow \infty$ предел, равный $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ существует предел и левой части формулы (1), причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Лопиталь Гильом Франсуа (1661—1704) — французский математик.

**Теорема остается справедливой и в случае, когда $x \rightarrow a-$ или $x \rightarrow a+$.

Так как $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к a , то отсюда заключаем, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ■

Доказанную теорему обычно называют *правилом Лопиталья*.

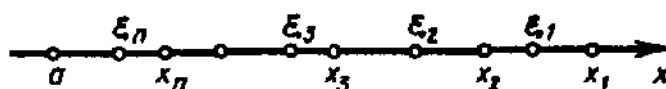
З а м е ч а н и е 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталья можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Теорема остается верной и в случае, когда $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. В самом деле, пусть, например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad \text{и}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ существует (ко-$$



нечный или бесконечный).

Рис. 75

Сделаем подстановку $x =$

$= 1/t$; тогда $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $f(x) = f(1/t) \rightarrow 0$, $g(x) = g(1/t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Применяя к функциям $f(1/t)$ и $g(1/t)$ теорему 6.5 и правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Рассмотрим примеры.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, +\infty \text{ или } -\infty.$$

Для этой неопределенности справедливо утверждение, аналогичное теореме 6.5, а именно: если в формулировке теоремы заменить требование $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ на условие $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то теорема останется справедливой.

Рассмотрим примеры.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{(-1/2) x^{-3/2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0.$$

3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ можно свести к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Покажем это на примерах.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Но $x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$, и получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Но $\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$, и при том же условии $x \rightarrow \pi/2$ получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Воспользовавшись правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

И наконец, рассмотрим неопределенности вида 0^0 , 1^∞ , ∞^0 . Такие неопределенности имеют место при рассмотрении функций $y = f(x)^{g(x)}$, если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞ , $g(x)$ — соответственно к 0, ∞ и 0. Эти неопределенности с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

сводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$, которая уже рассмотрена.

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0 . Но $x^x = e^{x \ln x}$, и в показателе степени получена неопределенность вида $0 \cdot \infty$, которая нами уже рассмотрена (см. пример 1). Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞ . Но

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = e^{\frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x}},$$

и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x/(1+x^2)}{e^x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(e^x - 1)(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x(1+x^2) + (e^x - 1)2x} = \frac{2}{1} = 2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - x}} = e^2.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида ∞^0 . Но

$$(\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{2 \cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^{\frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/(\cos x)}},$$

и в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{1/(\cos x)} &= 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1/(\operatorname{tg} x) \sec^2 x}{\sec x \operatorname{tg} x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} 2 \cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

§ 3. Формула Тейлора

Рассмотрим одну из главных формул математического анализа, имеющую многочисленные применения как в самом анализе, так и в смежных дисциплинах.

1. Формула Тейлора. Теорема 6.6 (теорема Тейлора)*. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$ **. Пусть x — любое значение аргумента из указанной окрестности, $x \neq a$. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.\end{aligned}\quad (1)$$

* Тейлор Брук (1685—1731) — английский математик.

**Отсюда следует, что сама функция $f(x)$ и ее производные до порядка n непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(x, a)$ многочлен относительно x степени n , стоящий в правой части формулы (1), т. е. положим

$$\varphi(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Он называется многочленом Тейлора степени n для функции $f(x)$.)

Далее обозначим через $R_{n+1}(x)$ разность

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a).$$

Теорема будет доказана, если установить, что

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < \xi < x.$$

Фиксируем любое значение x из указанной окрестности. Для определенности считаем $x > a$. Обозначим через t переменную величину, изменяющуюся на отрезке $a \leq t \leq x$, и рассмотрим на отрезке $[a, x]$ вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (2)$$

Функция $F(t)$ удовлетворяет на $[a, x]$ всем условиям теоремы Ролля: 1) из формулы (2) и из условий, наложенных на функцию $f(x)$, вытекает, что $F(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[a, x]$, так как $f(t)$ и ее производные до порядка n непрерывны и дифференцируемы на $[a, x]$;

2) полагая в (2) $t=a$, имеем

$$F(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0.$$

Полагая в (2) $t=x$, получаем

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \dots \\ &\dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{(x-x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $F(a)=F(x)$ выполнено.

На основании теоремы Ролля внутри отрезка $[a, x]$ существует точка ξ такая, что

$$F'(\xi) = 0. \quad (3)$$

Вычислим производную $F'(t)$. Дифференцируя равенство (2) по t , имеем

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что все члены в правой части равенства, за исключением двух последних, взаимно уничтожаются. Таким об-

разом,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (4)$$

Полагая в (4) $t=\xi$ и используя равенство (3), получаем

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$$

откуда

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \blacksquare$$

Формула (1) называется *формулой Тейлора*, а выражение для $R_{n+1}(x)$ — *остаточным членом в форме Лагранжа*. Его можно переписать в другом виде. Так как точка $\xi \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $\xi = a + \theta(x-a)$, и остаточный член принимает вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Эту форму остаточного члена наиболее часто используют в приложениях.

2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена. Часто формулу Тейлора (1) записывают в ином виде. Положим в (1) $a=x_0$, $x-a=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!} (\Delta x)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (5)$$

При $n=0$ из (5) получается формула Лагранжа

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x.$$

Покажем, что если функция $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в окрестности точки a , то остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-a)^n$ при $x \rightarrow a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a) = 0,$$

так как функция $f^{(n+1)}(\xi)$ ограничена, а $(x-a) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Таким образом,

$$R_{n+1}(x) = o[(x-a)^n] \text{ при } x \rightarrow a. \quad (6)$$

Формула (6) называется *остаточным членом в форме Пеано**.

3. Формула Маклорена. Формулой Маклорена** называют формулу Тейлора (1) при $a=0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

* Пеано Джузеппе (1858—1932) — итальянский математик.

** Маклорен Колин (1698—1746) — шотландский математик.

Остаточный член имеет вид:

$$1) \text{ в форме Лагранжа } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1;$$

$$2) \text{ в форме Пеано } R_{n+1}(x) = o(x^n).$$

4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.

1) $f(x) = e^x$. Так как

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n+1)}(x) = e^x, \\ f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n+1)}(0) = 1,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \quad (7)$$

2) $f(x) = \sin x$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при } n \text{ нечетном,} \end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \quad (8)$$

3) $f(x) = \cos x$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ (-1)^{n/2} & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}). \quad (9)$$

В формуле (8) остаточный член записан в виде $o(x^{2n})$, а не в виде $o(x^{2n-1})$, так как следующий за последним член равен нулю [то же самое относится к формуле (9)].

4) $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — вещественное число. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1),$$

то формула Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-(n+1)} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В частном случае, когда $\alpha = n$ — натуральное число, $f^{(n+1)}(x) = 0$, следовательно, $R_{n+1}(x) = 0$, мы получаем известную из элементарной математики *формулу бинома Ньютона*

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n. \quad (10)$$

Приведенные выше разложения показывают, что с помощью формулы Маклорена функции можно с определенной степенью точности заменять многочленами, являющимися наиболее простыми элементарными функциями. Над многочленами удобно выполнять арифметические действия, нетрудно вычислить значение многочлена в любой точке и т. д. Формулы Тейлора и Маклорена позволяют приближенно заменять многочленами и более сложные функции. Кроме того, эти формулы имеют широкий круг приложений. Мы ограничимся рассмотрением двух.

5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов. Формула Тейлора является эффективным средством для вычисления пределов функций, с которыми часто приходится иметь дело при исследовании функций.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. По формуле (8) при $n=2$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1} = \\ &= -\frac{1}{3!} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + 0 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^5 \sin x}$.

Решение. По формулам (7), (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^5 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2/2 + x^4/8 + o(x^4) - 1 + x^2/2 - x^4/24}{x^5(x + o(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4/8 - x^4/24 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/8 - 1/24 + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(здесь символом $\alpha(x)$ обозначена величина $\frac{o(x^4)}{x^4}$, являющаяся бесконечно малой при $x \rightarrow 0$).

6. Вычисление числа e . В п. 2, § 3, гл. 2 было введено число e как предел последовательности $\{(1+1/n)^n\}$ и получена грубая оценка $2 \leq e \leq 3$.

Покажем, как вычислить число e с любой необходимой точностью. Для этого запишем формулу (7) с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (11)$$

Если заменить функцию e^x ее многочленом Тейлора степени n , то получим приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad (12)$$

абсолютная погрешность которого

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1 \leq x \leq 1$, то

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \quad (13)$$

Полагая в (12) $x=1$, получаем приближенное значение числа e :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

При этом абсолютная погрешность меньше $3/(n+1)!$ Если требуется вычислить значение e с точностью до 0,001, то число n определяется из неравенства $\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$, или $(n+1)! > 3000$. Следовательно, если взять $n=6$, то требуемое неравенство удовлетворяется.

Таким образом, используя формулу Маклорена, можно вычислить число e с любой точностью, при этом алгоритм вычисления числа e , основанный на формулах (11) и (13), легко реализуется на ЭВМ.

§ 4. Исследование поведения функций и построение графиков

1. Признак монотонности функции. Теорема 6.7. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b) , то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a, b) .

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $f'(x) \geq 0$. Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки из (a, b) и $x_1 < x_2$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа, согласно которой имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

По условию, $f'(c) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$, поэтому $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ или $f(x_2) \geq f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ не убывает на (a, b) .

Доказательство для случая $f'(x) \leq 0$ аналогично. ■

З а м е ч а н и е. Точно так же можно доказать, что если $f'(x) > 0$ (< 0) на (a, b) , то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b) .

2. Отыскание точек локального экстремума функции. Определение. Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) при $x \neq x_0$ (рис. 76).

Локальный максимум (max) и локальный минимум (min) объединяются общим названием *локальный экстремум*.

Из определения следует, что понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) может и не выполняться для всех значений x в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой окрестности точки x_0 . Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов и несколько локальных минимумов, причем может так случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

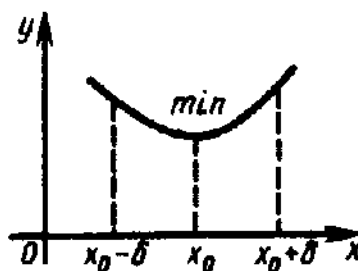
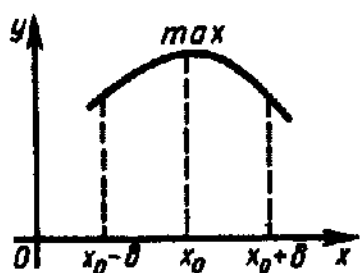


Рис. 76

Теорема 6.8 (необходимое условие локального экстремума). Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Так как в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то существует такой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в котором значение $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим среди всех других значений этой функции. Тогда по теореме Ферма производная функции в точке x_0 равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$. ■

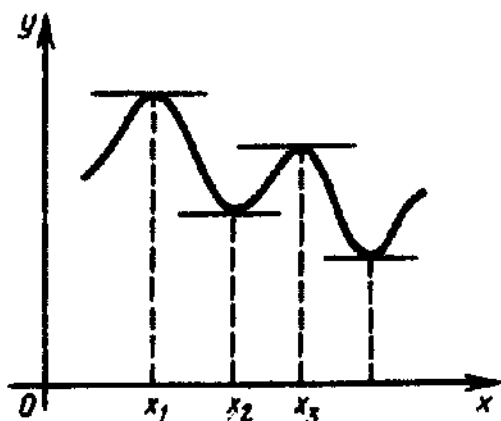


Рис. 77

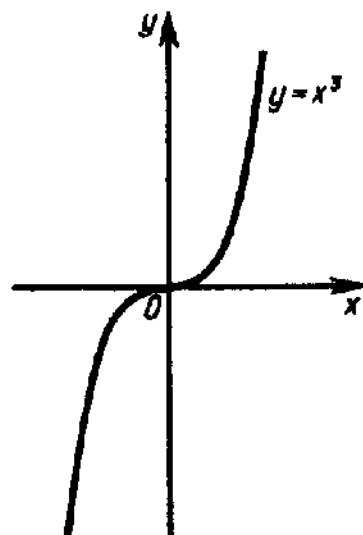


Рис. 78

Теорема 6.8 имеет следующий геометрический смысл. Если x_1 , x_2 и x_3 — точки локального экстремума и в соответствующих точках графика существуют касательные, то эти касательные параллельны оси Ox (рис. 77).

Иногда такие точки называют стационарными; мы будем называть их *точками возможного экстремума*. Если точка x_0 — точка возможного экстремума, т. е. $f'(x_0)=0$, то она может и не быть точкой локального максимума или минимума. Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но, тем не менее, в точке $x=0$ нет локального экстремума (рис. 78). Установим достаточное условие существования локального экстремума. Этому посвящается следующая теорема.

Теорема 6.9 (достаточное условие локального экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ -окрестности точки x_0 . Тогда, если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всех x из $(x_0-\delta, x_0)$, а $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) для всех x из $(x_0, x_0+\delta)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум); если же $f'(x)$ во всей δ -окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Другими словами, если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 — точка локального максимума; если $f'(x)$ в точке x_0 меняет знак с «-» на «+», то x_0 — точка локального минимума; если же $f'(x)$ в точке x_0 знака не меняет, то в точке x_0 экстремума не существует.

Доказательство. Пусть $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «-» и пусть $x \in (x_0-\delta, x_0)$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$. Получаем

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x), \quad c \in (x, x_0).$$

Так как $f'(x)>0$ на $(x_0-\delta, x_0)$, то $f'(c)>0$, и, кроме того, $x_0 - x > 0$, следовательно,

$$f(x_0) - f(x) > 0, \text{ или } f(x_0) > f(x). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$. Получаем

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x).$$

Так как $f'(x)<0$ на $(x_0, x_0+\delta)$, то $f'(c)<0$, и, кроме того, $x - x_0 > 0$, следовательно,

$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ или } f(x_0) > f(x). \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что в рассматриваемой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ при $x \neq x_0$, а это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум.

Аналогично рассматривается случай перемены знака $f'(x)$ с «-» на «+».

Осталось рассмотреть случай, когда $f'(x)$ знака не меняет. Пусть $f'(x)>0$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$; тогда по теореме 6.7 функция $f(x)$ не убывает на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, т. е. для любых $x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, а для любых $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Это означает, что точка x_0 не является точкой локального экстремума. ■

З а м е ч а н и е. Теорема 6.9 остается справедливой, если функция $f(x)$ в самой точке x_0 не дифференцируема, а только непрерывна. Так, например, функция $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ непрерывна, но не дифференцируема.

В качестве примера рассмотрим вопрос об отыскании точек локального экстремума функции $f(x)=x^3-3x$. Находим производную: $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$. Решая уравнение $3(x^2-1)=0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1=-1$ и $x_2=1$. Дальнейшее исследование удобно вести, нарисовав вспомогательный чертеж (рис. 79). Отметив на нем точки $x_1=-1$ и $x_2=1$ и исследовав знак $f'(x)$ в окрестности этих точек, получаем: $f(x)$ в точке $x_1=-1$ имеет локальный максимум, а в точке $x_2=1$ — локальный минимум. Далее находим: $y_{\max}=f(-1)=2$, $y_{\min}=f(1)=-2$.

На рис. 79 видны и интервалы монотонности $f(x)$: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$, причем в первом и третьем из них функция возрастает, а во втором — убывает.

3. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$ в любой точке $M(x; f(x))$ этого графика ($a < x < b$), причем касательная не параллельна оси Oy , поскольку ее угловой коэффициент, равный $f'(x)$, конечен.

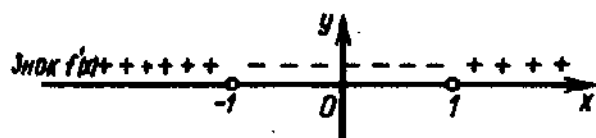


Рис. 79

Определение 1. Будем говорить, что график функции $y=f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a, b) (рис. 80).

Теорема 6.10. Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) во всех точках (a, b) , то график функции $y=f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

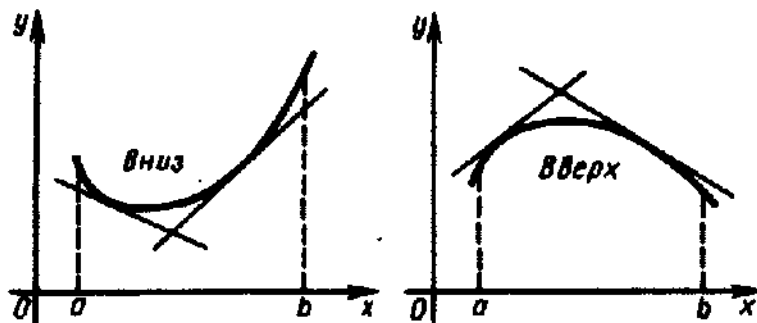


Рис. 80

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $f''(x) \geq 0$ на (a, b) . Обозначим через c произвольную точку (a, b) (рис. 81). Требуется доказать, что график функции $y=f(x)$ лежит не ниже касательной, проходящей через точку $M(c; f(c))$.

Запишем уравнение этой касательной, обозначая текущую ординату ее точек через Y : $Y - f(c) = f'(c)(x - c)$ или

$$Y = f(c) + f'(c)(x - c). \quad (3)$$

Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора при $n=1$. Получим

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2, \quad \xi \in (c, x). \quad (4)$$

Формула (4) справедлива для любого x из (a, b) .

Вычитая равенство (3) из равенства (4), имеем

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2. \quad (5)$$

Так как, по условию, $f''(x) \geq 0$ на (a, b) , то правая часть равенства (5) неотрицательна, т. е. $y - Y \geq 0$ для всех x из (a, b) или $y \geq Y$. Последнее неравенство и доказывает, что график функции $y = f(x)$ всюду в пределах (a, b) лежит не ниже касательной (3).

Аналогично доказывается теорема для случая $f''(x) \leq 0$. ■

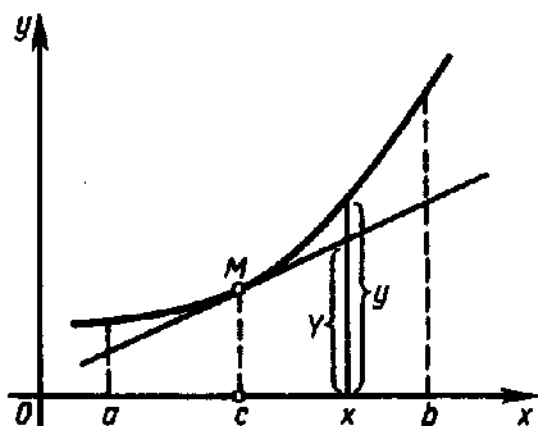


Рис. 81

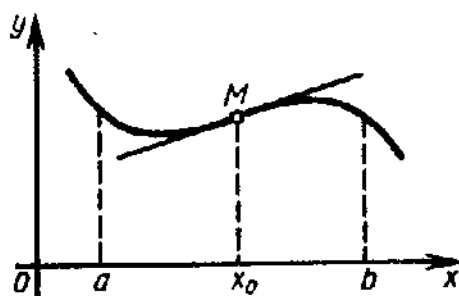


Рис. 82

Определение 2. Точка $M(x_0; f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если в точке M график имеет касательную, и существует такая окрестность точки x_0 , в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как с одной стороны от этой точки график лежит под касательной, а с другой — над нею, т. е. в окрестности точки перегиба график функции геометрически переходит с одной стороны касательной на другую и «перегибается» через нее. Отсюда и произошло название «точка перегиба» (рис. 82).

Теорема 6.11 (необходимое условие точки перегиба). Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$ и пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т. е. $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f''(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности второй производной по теореме 4.8 об устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность точки x_0 , в которой $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), и, значит, согласно теореме 6.10 график функции $y = f(x)$ имеет определенное направление выпуклости в этой окрестности. Но это противоречит наличию перегиба в точке $M(x_0; f(x_0))$ (рис. 82). Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Следует заметить, что не всякая точка $M(x_0; f(x_0))$, для которой $f''(x_0) = 0$, является точкой перегиба. Например, график функции $f(x) = x^4$ не имеет перегиба в точке $(0; 0)$, хотя $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$ (рис. 83). Поэтому равенство нулю второй производной является лишь необходимым условием перегиба. Точки $M(x_0; f(x_0))$ графика, для которых $f''(x_0) = 0$, будем называть *критическими*. Необходимо дополнительно исследовать вопрос о наличии перегиба в каждой критической точке, для чего следует установить достаточное условие перегиба.

Теорема 6.12 (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 , то график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$.

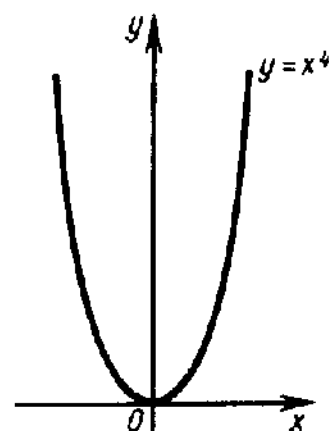


Рис. 83

Доказательство. Из того, что $f''(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные знаки, на основании теоремы 6.10 заключаем, что направление выпуклости графика функции слева и справа от точки x_0 является различным. Это и означает наличие перегиба в точке $M(x_0; f(x_0))$. ■

Замечание. Теорема остается верной, если $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 , и существует касательная к графику функции в точке M . Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 , то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0; f(x_0))$. Доказательство данного факта аналогично доказательству теоремы.

Рассмотрим пример: $f(x) = x^{1/3}$. Эта функция в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $O(0; 0)$ совпадает с осью Oy . Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. Однако график функции $y = x^{1/3}$ имеет перегиб в точке $O(0; 0)$, так как вторая производная $f''(x) = 2/(9x^{5/3})$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки (рис. 84).

Итак, вопрос о направлении выпуклости и точках перегиба графика функции исследуется с помощью второй производной.

В качестве примера возьмем функцию $f(x) = x^3 - 3x$, которую начали рассматривать в п. 2. Знак второй производной будем отмечать на вспомогательном чертеже, изображенном на рис. 79. Нахо-

дим вторую производную: $f''(x) = 6x$. Из уравнения $6x = 0$ получаем одну критическую точку: $O(0; 0)$. Отметив точку $x = 0$ на вспомогательном чертеже (рис. 85) и исследовав знак $f''(x)$ в ее окрестности, получаем: слева от точки $x = 0$ $f''(x) < 0$ (выпуклость графика направлена вверх), а справа — $f''(x) > 0$ (выпуклость графика направлена вниз), т. е. точка $O(0; 0)$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции. Этот график схематически изображен на рис. 86.

Докажем теперь, что часть эллипса $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$, расположенная в верхней полуплоскости ($y \geq 0$), имеет на интервале $(-a, a)$ выпуклость, направленную вверх. В самом деле, из уравнения эллипса имеем $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Далее находим: $y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $y'' = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$. Из выражения для второй про-

изводной вытекает, что она отрицательная на интервале $(-a, a)$. Значит, данная кривая на всем интервале $(-a, a)$ имеет выпуклость, направленную вверх (см. рис. 33).

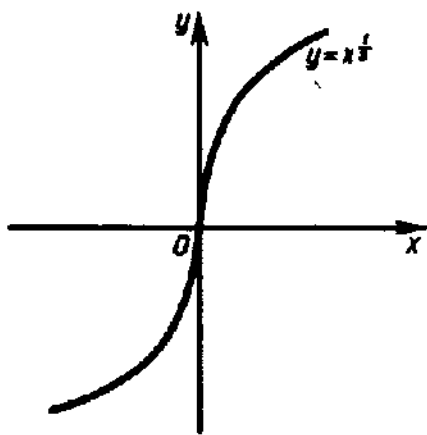


Рис. 84

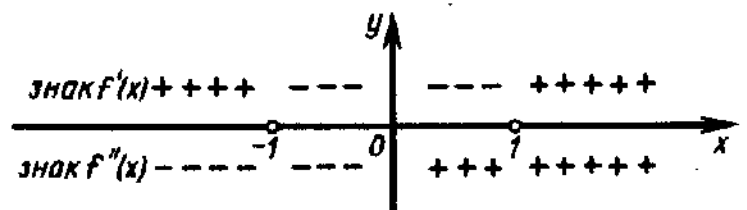


Рис. 85

Аналогично можно показать (сделайте это самостоятельно), что часть гиперболы $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$, расположенная в верхней полуплоскости, на интервалах $(a, +\infty)$ и $(-\infty, -a)$ имеет выпуклость, направленную вверх.

4. Асимптоты графика функции. При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ или вблизи точек разрыва 2-го рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют *асимптотами**.

Существуют три вида асимптот: *вертикальные, горизонтальные и наклонные*.

Определение 1. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

*Понятие асимптоты уже встречалось в аналитической геометрии при рассмотрении гиперболы (см. гл. 3 § 6, п. 2).

В этом случае расстояние от точки $M(x; f(x))$ до прямой $x=x_0$ равно $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x))^2}=|x-x_0|$ и, следовательно, $d\rightarrow 0$ при $x\rightarrow x_0$.

Например, график функции $y=f(x)=1/x$ (рис. 87) имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как $f(x)\rightarrow +\infty$ при $x\rightarrow 0+$ и $f(x)\rightarrow -\infty$ при $x\rightarrow 0-$.

Определение 2. Прямая $y=A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\rightarrow +\infty$ ($x\rightarrow -\infty$), если $\lim_{\substack{x\rightarrow +\infty \\ (x\rightarrow -\infty)}} f(x)=A$.

В этом случае расстояние от точки $M(x; f(x))$ до прямой $y=A$ равно $d=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-A)^2}=|f(x)-A|$ и, следовательно, $d\rightarrow 0$ при $x\rightarrow \infty$, так как $\lim_{x\rightarrow \infty} |f(x)-A|=0$.

Например, график рассмотренной выше функции $y=1/x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\rightarrow +\infty$ и при $x\rightarrow -\infty$, так как $1/x\rightarrow 0$ при $x\rightarrow +\infty$ и при $x\rightarrow -\infty$.

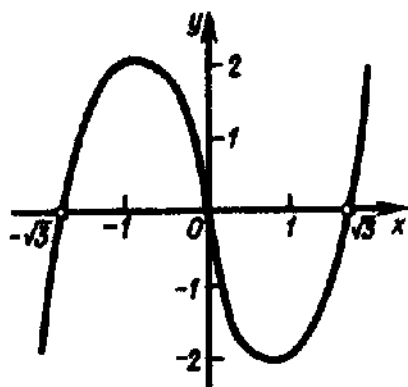


Рис. 86

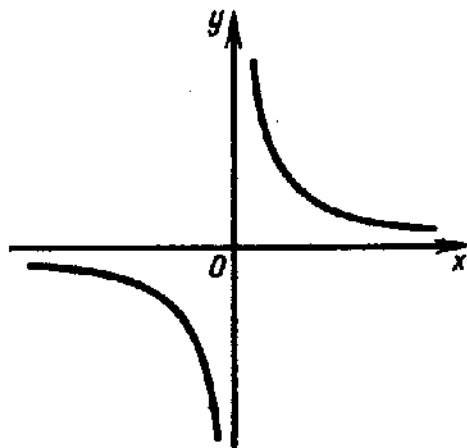


Рис. 87

Определение 3. Прямая $y=kx+b$ ($k\neq 0$) называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\rightarrow +\infty$ ($x\rightarrow -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad (6)$$

где $\alpha(x)\rightarrow 0$ при $x\rightarrow +\infty$ ($x\rightarrow -\infty$).

Рассмотрим геометрический смысл наклонной асимптоты. Для определенности разберем случай, когда $x\rightarrow +\infty$. (Случай $x\rightarrow -\infty$ рассматривается аналогично).

Пусть $M(x; y)$ — точка графика функции $y=f(x)$ и пусть прямая $\tilde{y}=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\rightarrow +\infty$. Текущую ординату точки на асимптоте обозначим через $\tilde{y}$, точку на асимптоте — через $N(x; \tilde{y})$ (рис. 88). Тогда $|MN|=|y-\tilde{y}|=|f(x)-(kx+b)|=|\alpha(x)|\rightarrow 0$ при $x\rightarrow +\infty$. Опустим из точки M перпендикуляр MP на асимптоту. Расстояние d от точки M до асимптоты равно $|MP|=|MN|\cos \alpha$, где α — угол между асимптотой и осью Ox , и, следовательно,

$$\lim_{x\rightarrow +\infty} d=0.$$

Таким образом, расстояние от точки $M(x; y)$ графика функции до асимптоты стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, т. е. график функции неограниченно приближается к асимптоте при $x \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим способ отыскания наклонной асимптоты, т. е. способ определения чисел k и b в уравнении асимптоты. Разделив равенство (6) на x и перейдя к пределу при $x \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k.$$

Итак,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (7)$$

Далее, из соотношения (6) получаем: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b$. Таким образом,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]. \quad (8)$$

Доказано, что если прямая $\tilde{y} = kx + b$ — наклонная асимптота, то числа k и b находятся по формулам (7) и (8). Обратно, если оба предела (7) и (8) существуют, причем $k \neq 0$, то прямая $\tilde{y} = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

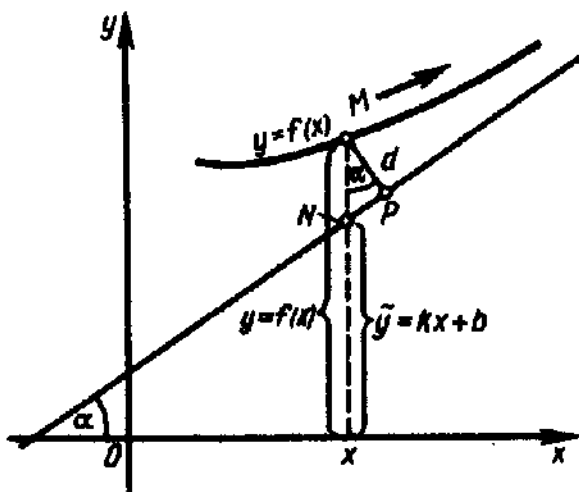


Рис. 88

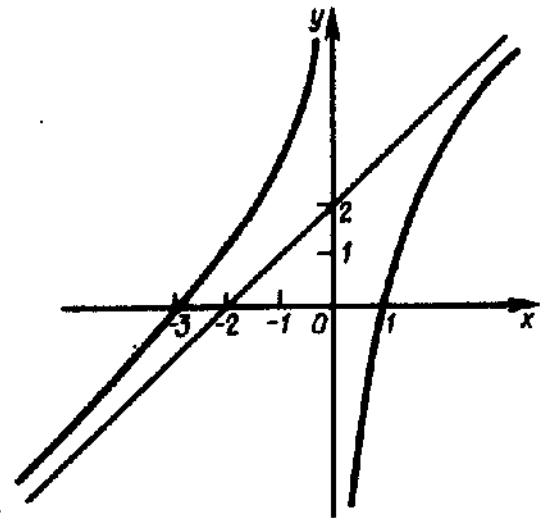


Рис. 89

В самом деле, полагая $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ и используя равенство (8), получаем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$. Следовательно, справедливо равенство (6): $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$, т. е. прямая $\tilde{y} = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \rightarrow +\infty$.

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке: 1) вертикальные асимптоты; 2) горизонтальные асимптоты; 3) наклонные асимптоты.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$.

Решение. 1) Находим вертикальные асимптоты. Точка $x=0$ — точка разрыва 2-го рода данной функции, причем $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0-$, $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 0+$. Следовательно, ось ординат ($x=0$) — вертикальная асимптота.

2) Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty (-\infty),$$

следовательно, горизонтальных асимптот нет.

3) Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right] = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(\frac{2x - 3}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(2 - \frac{3}{x} \right) = 2. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой графика данной функции как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. График функции схематически изображен на рис. 89.

Пример 2. Доказать, что гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет своими наклонными асимптотами прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Решение. Так как $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x} \right)^2} \right] = \pm \frac{b}{a}; \\ \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx] &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x \right] = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\pm \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \right] = \pm \frac{b}{a} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются наклонными асимптотами данной гиперболы как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$.

5. Схема исследования графика функции. Рассмотрим примерную схему, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить ее график.

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти асимптоты.
4. Найти точки возможного экстремума.
5. Найти критические точки.

6. С помощью вспомогательного чертежа исследовать знак первой и второй производных. Определить участки возрастания и убывания функции, найти направление выпуклости графика, точки экстремума и точки перегиба.

7. Построить график, учитывая исследование, проведенное в п. 1—6.

При этом в начале исследования полезно проверить, является данная функция четной или нечетной, чтобы при построении использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

В качестве примера построим по изложенной выше схеме график функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

1. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$, при котором обращается в нуль знаменатель.

2. Так как уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней, то график функции не имеет точек пересечения с осью Ox , но пересекает ось Oy в точке $(0; -1)$.

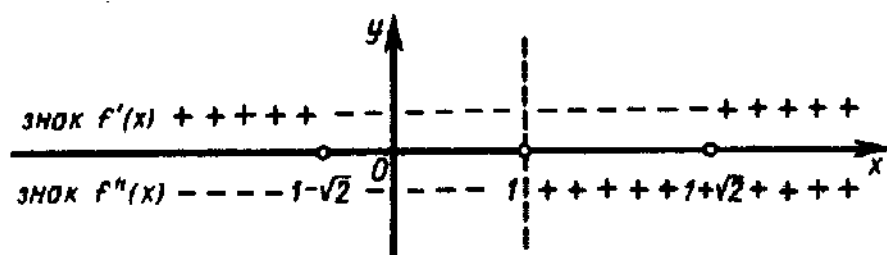


Рис. 90

3. Выясним вопрос о существовании асимптот. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x = 1$. Так как $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 1^-$, $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1^+$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Если $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то $y \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow -\infty$), следовательно, горизонтальной асимптоты у графика нет. Далее, из существования пределов

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + 1/x^2}{1 - 1/x} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right] = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + x}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + 1/x}{1 - 1/x} = 1 \end{aligned}$$

вытекает, что при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

4. Для нахождения точек возможного экстремума вычислим первую производную функции:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Решая уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

5. Для нахождения критических точек вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} f'' &= \\ &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{(x-1)^4}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то критических точек нет.

6. Нарисуем вспомогательный чертеж и исследуем знак первой и второй производных (рис. 90). Получаем, что функция на $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ возрастает, на $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ убывает, а на $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$ снова возрастает. Точки экстремума: 1) максимум при $x = 1 - \sqrt{2}$, причем $f(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$; 2) минимум при $x = 1 + \sqrt{2}$, причем $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$. На $(-\infty, 1)$ направление выпуклости графика вверх, а на $(1, +\infty)$ — вниз.

7. Используя полученные данные, строим эскиз графика (рис. 91).

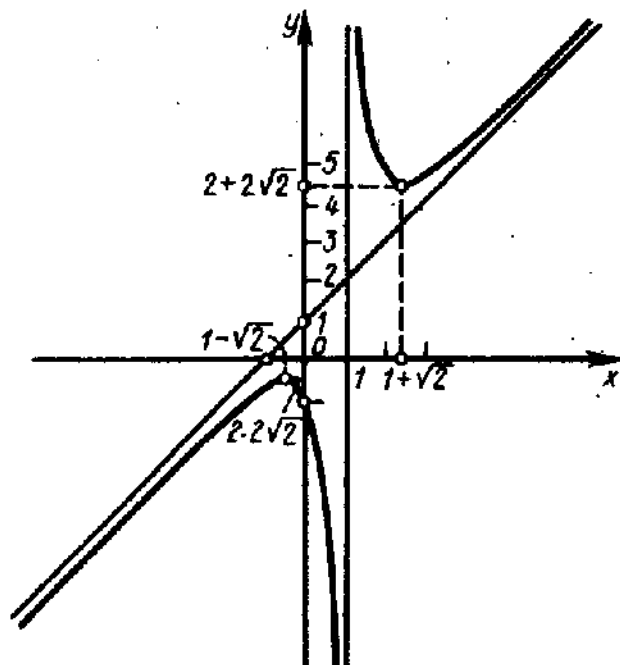


Рис. 91

§ 5. Интерполяция функций

Интерполяция применяется при решении многих как теоретических, так и прикладных вопросов, связанных с вычислениями.

1. **Постановка задачи.** Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы значения функции $y = f(x)$ в точках $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Требуется найти многочлен не выше n -й степени:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

который в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ принимает те же значения, что и данная функция, т. е. выполняются равенства

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Другими словами, требуется найти такой многочлен вида (1), который на отрезке $[a, b]$ являлся бы приближением для функции

$y = f(x)$. Поставленная задача называется *задачей интерполяции*, многочлен (1) — *интерполяционным многочленом*, а точки $x_0, x_1, \dots, \dots, x_n$ — *узлами интерполяции*. Решение данной задачи дает возможность находить приближенные значения функции $f(x)$ в точках x , лежащих между узлами. Это важно, когда функция задана только в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, а нужно уметь находить ее значения и в промежутках между этими точками, а также когда функция $f(x)$ задается формулой на всем отрезке $[a, b]$, но вычисление ее значений по этой формуле очень трудоемко.

Покажем, что всегда существует и притом единственный интерполяционный многочлен (1), удовлетворяющий условиям (2). Для простоты ограничимся случаем $n=2$, т. е. случаем многочлена второй степени

$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2. \quad (3)$$

Подставляя в уравнение (3) вместо x последовательно числа x_0 , x_1 и x_2 и принимая во внимание, что в этих точках многочлен принимает соответственно значения y_0 , y_1 и y_2 , получаем систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными коэффициентами a_0 , a_1 , a_2 :

$$\begin{cases} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 = y_0, \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = y_1, \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = y_2. \end{cases}$$

Так как числа x_0 , x_1 и x_2 различны, то определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_2) \neq 0.$$

Следовательно (см. гл. 10, § 3), решение данной системы существует и оно единственно, что и доказывает утверждение. Геометрически это означает, что через три точки $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ проходит единственная линия, определяемая уравнением (3). Таким образом, интерполяционный многочлен (1) всегда существует и единствен. Далее будут рассмотрены различные формы интерполяционного многочлена.

2. Интерполяционная формула Лагранжа. Рассмотрим вопрос об отыскании коэффициентов интерполяционного многочлена (1). Подставляя этот многочлен в систему (2), получаем систему $n+1$ уравнений первой степени с $n+1$ неизвестными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$:

[illegible]

решая которую найдем значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$. Подставляя эти значения в равенство (1), получаем искомый интерполяционный многочлен. Однако на практике, как правило, решение системы связано с громоздкими вычислениями. Поэтому интерполяционный многочлен (1) будем искать в виде

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \\ + a_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots \\ \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}). \quad (4)$$

Полагая в (4) $x=x_0$ и принимая во внимание условия (2), получаем

$$y_0 = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n),$$

откуда

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Полагая затем в (4) $x=x_1$, имеем

$$y_1 = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n),$$

откуда

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}.$$

Аналогично найдем

$$a_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}, \\ \dots \dots \dots \\ a_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ в формулу (4), получаем искомый интерполяционный многочлен

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \dots \\ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n. \quad (5)$$

Формула (5) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Пример. В результате эксперимента в точках $x_0=1, x_1=3, x_2=5$ получены значения функции $f(x)$, соответственно равные $y_0=2, y_1=1, y_2=8$. Найти многочлен второй степени $P_2(x)$, приближенно выражающий функцию $f(x)$.

Решение. По формуле (5) находим

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}2 + \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}1 + \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}8; \\ P_2(x) = x^2 - (9/2)x + 11/2.$$

3. Интерполяционная формула Ньютона. Рассмотрим частный случай, когда разность h между соседними узлами интерполяции

величина постоянная: $x_i - x_{i-1} = h$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots, \\ \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \dots, \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \dots, \\ &\dots \dots \dots \Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0, \Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1, \dots,\end{aligned}$$

называемые *разностями первого, второго, третьего, ..., n-го порядков*.

Найдем интерполяционный многочлен n -й степени, принимающий в точках $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$ соответственно значения $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Сначала найдем многочлен первой степени, принимающий в точках $x_0, x_1 = x_0 + h$ значения y_0, y_1 . Подставляя в формулу (5) вместо x_1 число $x_1 = x_0 + h$, получаем

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}.$$

Аналогично находим

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0) (x - x_1),$$

$$\begin{aligned}P_3(x) &= y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0) (x - x_1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2),\end{aligned}$$

и вообще

$$\begin{aligned}P_n(x) &= y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0) (x - x_1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) + \dots \\ &\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}).\end{aligned}\quad (6)$$

Формула (6) определяет искомый многочлен и называется *интерполяционной формулой Ньютона*.

Задача интерполяции имеет единственное решение, поэтому формулы Лагранжа и Ньютона для данных значений x_i и y_i тождественны и отличаются лишь группировкой членов. На практике формула Ньютона более удобна. Особенность ее заключается в том, что в случае добавления новых узлов интерполяции в формуле Лагранжа надо пересчитывать заново все коэффициенты, а в формуле Ньютона добавятся только новые слагаемые, а старые остаются без изменения.

Существуют и другие формулы интерполяции, среди которых наиболее употребительна *эрмитова интерполяция*. Задача ставится так: заданы n узлов, n значений функции $f(x)$ и n значений ее производной $f'(x)$ в узлах; требуется найти многочлен степени

не выше $2n-1$ такой, чтобы

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, P'(x_i) = f'(x_i) = y'_i, i=1, 2, \dots, n.$$

На решении этой задачи останавливаться не будем, а только заметим, что если все x_i различны, то существует единственное решение, которое находится аналогично предыдущему.

4. Остаточный член интерполяции. Для оценки близости интерполяционного многочлена $P_n(x)$ к функции $f(x)$ необходимо исследовать разность между функцией и интерполяционным многочленом

$$R(x) = f(x) - P_n(x),$$

называемую *остаточным членом интерполяции*.

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ существует $(n+1)$ -я непрерывная производная $f^{(n+1)}(x)$. Тогда

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (7)$$

так как $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Пусть x — любое фиксированное число, $a \leq x \leq b$, не совпадающее с узлами интерполяции, t — переменная величина, $a \leq t \leq b$. Положим

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

и рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$F(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)} \omega(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Функция $F(t)$, очевидно, $n+1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем в силу (7) и того факта, что $\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, имеем

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \frac{R(x)}{\omega(x)}. \quad (8)$$

Далее, функция $F(t)$ обращается в нуль в $n+2$ точках: $x_0, x_1, \dots, x_n$ и x (x — фиксированное). Поэтому по теореме Ролля ее первая производная обращается в нуль, по крайней мере, в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$, вторая производная обращается в нуль, по крайней мере, в n точках этого отрезка и т. д. По индукции получаем, что $(n+1)$ -я производная функции $F(t)$ обращается, по крайней мере, один раз в нуль внутри отрезка $[a, b]$. Следовательно, существует точка ξ ; $a < \xi < b$, такая, что

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0. \quad (9)$$

Полагая в (8) $t = \xi$ и используя (9), находим

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{R(x)}{\omega(x)} = 0,$$

откуда

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x), \quad a \leq x \leq b, \quad a < \xi < b. \quad (10)$$

Равенство (10) определяет остаточный член интерполяции. Обозначая через k наибольшее значение функции $|f^{(n+1)}(x)|$ на отрезке

$[a, b]$, получаем формулу оценки остаточного члена для любого $x \in [a, b]$:

$$|R(x)| \leq \frac{k}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

§ 6. Методы приближенного вычисления корней уравнений

В этом параграфе рассмотрим вопрос о приближенном вычислении корней уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Из элементарной математики известен способ нахождения корней уравнения $f(x)=0$, если $f(x)$ — линейная или квадратичная функция. Для более сложных функций обычно приходится прибегать к различным методам приближенного вычисления корней уравнения. Познакомимся с методом «вилки» и методом касательных*.

1. Метод «вилки». Пусть интересующий нас корень уравнения $f(x)=0$ является внутренней точкой отрезка $[a, b]$ и других корней на $[a, b]$ нет. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет на концах этого отрезка значения разных знаков. На практике обычно грубой прикидкой находят такой отрезок. Назовем «вилкой» любой отрезок, на концах которого $f(x)$ имеет значения разных знаков.

Для определенности будем считать, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим $[a, b]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки. Обозначим его $[a_1, b_1]$. (Если бы значение $f(x)$ в середине $[a, b]$ равнялось нулю, то корень был бы найден.) Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и выберем тот из полученных отрезков, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательность вложенных отрезков — вилок:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

обладающих тем свойством, что для любого n $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. По теореме 2.13 о вложенных отрезках существует точка c , принадлежащая всем отрезкам, к которой сходится каждая из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Докажем, что точка c и является искомым корнем, т. е. $f(c)=0$. Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке c , каждая из последовательностей $\{f(a_n)\}$ и $\{f(b_n)\}$ сходится к $f(c)$. Но тогда из условий $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$ по теореме 2.10 получаем, что одновременно справедливы неравенства $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$. Отсюда $f(c)=0$, что и требовалось доказать.

Теперь нетрудно понять, как вычислить приближенно корень $x=c$. За приближенное значение этого корня можно взять середину отрезка $[a_n, b_n]$, т. е. точку $(a_n + b_n)/2$. Так как длина $[a_n, b_n]$ равна $(b-a)/2^n$, а расстояние от корня c до точки $(a_n + b_n)/2$

*Этот метод называется также методом Ньютона.

не превышает половины длины отрезка $[a_n, b_n]$, то число $(a_n + b_n)/2$ отличается от точного значения корня не более чем на $(b - a)/2^{n+1}$. Таким образом, описанный метод позволяет вычислить искомый корень c с любой точностью, если взять достаточно большое n . Этот метод удобен тем, что требует однотипных вычислительных операций. Поэтому его часто используют при проведении вычислений на современных быстродействующих вычислительных машинах.

2. Метод касательных. Этот метод является одним из самых эффективных методов приближенного вычисления корней уравнения $f(x) = 0$.

Пусть по-прежнему корень $x = c$ является внутренней точкой $[a, b]$. Предположим также, что на $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет непрерывные знакостоянные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, а ее значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Так как знак $f'(x)$ постоянен, то функция $f(x)$ на $[a, b]$ либо возрастает, либо убывает, и, следовательно, в обоих случаях график функции $y = f(x)$ пересекает ось Ox только в одной точке, т. е. $x = c$ является единственным корнем на $[a, b]$. Аналогично, так как знак $f''(x)$ постоянен, то направление выпуклости графика функции $y = f(x)$ на этом отрезке не меняется.

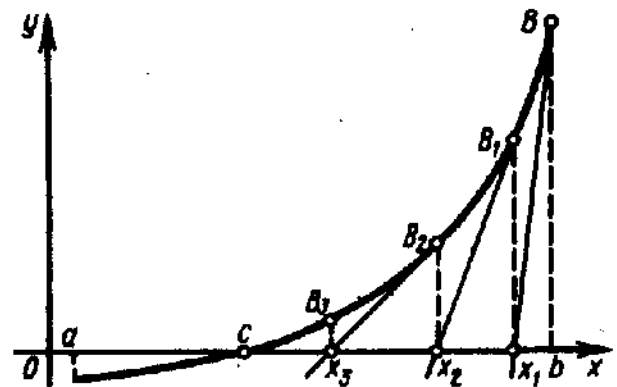


Рис. 92

Для определенности рассмотрим случай, когда $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$. В этом случае $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ и график направлен выпуклостью вниз (рис. 92). Проведем через точку $B(b; f(b))$ касательную к графику функции $y = f(x)$. Ее уравнение имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Полагая $y = 0$, найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox :

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Так как $\frac{f(b)}{f'(b)} > 0$, то $x_1 < b$, а так как график функции $y = f(x)$ расположен не ниже касательной, то $x_1 > c$. Итак, $c < x_1 < b$. Возьмем за первое приближенное значение корня точку x_1 . Далее проведем касательную к графику через точку $B_1(x_1; f(x_1))$ и, поступая аналогично, возьмем за второе приближенное значение корня точку x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

При этом $c < x_2 < x_1$. Продолжая этот процесс неограниченно, для любого n получаем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (1)$$

выражающую x_{n+1} через x_n . Таким образом, имеем последовательность приближенных значений корня c , причем

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots > c. \quad (2)$$

Формула (1) является основной расчетной формулой метода касательных. Он представляет собой метод последовательных приближений (итераций), который строится с помощью формулы (1).

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к искомому корню c и оценим погрешность, т. е. отклонение приближенного значения x_n от точного значения корня c . Действительно, в силу (2), последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу числом c . Следовательно, по теореме 2.12 она имеет предел $c' \geq c$. Переходя к пределу в равенстве (1), учитывая непрерывность $f(x)$ и $f'(x)$, получаем

$$c' = c' - \frac{f(c')}{f'(c')},$$

откуда следует, что $f(c') = 0$, т. е. c' — корень уравнения $f(x) = 0$. Но так как на $[a, b]$ имеется только один корень c , то $c' = c$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню c .

Оценим теперь отклонение n -го приближения x_n от точного значения корня c . Применяя к выражению $f(x_n) = f(x_n) - f(c)$ формулу Лагранжа, имеем $f(x_n) = (x_n - c)f'(\xi_n)$, где $c < \xi_n < x_n$. Отсюда получаем следующую оценку:

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (3)$$

где m — наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a, b]$. Формула (3) позволяет оценить отклонение приближенного значения x_n от точного значения корня c через значение модуля функции $f(x)$ в точке x_n . Отметим, что оценка (3) справедлива не только для метода касательных, но и вообще для любого метода приближенного вычисления корня при условии $m \neq 0$.

Мы рассмотрели случай, когда $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на $[a, b]$. В зависимости от комбинации знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ возможны еще три случая: 1) $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$; 2) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$; 3) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, в каждом из которых обоснование метода касательных аналогично рассмотренному случаю.

Пример. Вычислить корень уравнения $x^2 - 5 = 0$ методом касательных.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 5$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой. Найдем отрезок, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. Так как $f(2) = -1$, $f(3) = 4$, то таким отрезком является отрезок $[2, 3]$.

Внутри него находится искомый корень уравнения. Функция $f(x)$ имеет на этом отрезке непрерывные положительные производные $f'(x)=2x$ и $f''(x)=2$. Следовательно, первую касательную к графику функции $y=f(x)$ следует проводить через точку $(3; 4)$. Положив в формуле (1) $x_0=3$, получим первое приближение корня: $x_1=3-\frac{4}{2 \cdot 3}=2\frac{1}{3}$. Положив теперь в формуле (1) $x_1=2\frac{1}{3}$, получим второе приближение корня: $x_2=2\frac{1}{3}-\frac{2}{21}=2\frac{5}{21}$, и, наконец, положив $x_2=2\frac{5}{21}$ в формуле (1), получим третье приближение корня: $x_3=2\frac{2}{21}-\frac{2}{987}=2,23607$ и т. д.

Для нахождения погрешности приближения x_3 воспользуемся формулой (3). Так как производная $f'(x)=2x$ на $[2, 3]$ возрастает, то наименьшим ее значением на этом отрезке является $f'(2)=4$, т. е. $m=4$. Найдем $f(x_3)$: $f(x_3)=x_3^2-5=(2,23607)^2-5=0,00001$. Теперь по формуле (3) имеем

$$|x_3 - c| < \frac{0,00001}{4} = 0,0000025 = 2,5 \cdot 10^{-6}.$$

Если по условию задачи такая точность вычисления корня достаточна, то процесс построения приближений следует прекратить, в противном случае этот процесс следует продолжить.

ГЛАВА 7

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной функции. Одной из основных задач дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к обратной задаче: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции — одна из основных задач интегрального исчисления.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Рассмотрим примеры.

1. Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на всей числовой прямой, так как при любом значении x $(\sin x)'=\cos x$.

2. Функция $F(x)=x^3$ — первообразная для функции $f(x)=3x^2$ на всей числовой прямой, ибо в каждой точке x $(x^3)'=3x^2$.

3. Функция $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ — первообразная для функции $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$ на интервале $(-1, +1)$, так как в любой точке x этого интервала $(\sqrt{1-x^2})' = -x/\sqrt{1-x^2}$.

Задача отыскания по данной функции $f(x)$ ее первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$, так как $[F(x) + C]' = f(x)$ для любого числа C . Например, для $f(x) = \cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

Теперь покажем, что множество функций $F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, исчерпывает все первообразные для функции $f(x)$.

Лемма 7.1. *Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть во всех точках промежутка X производная функции $f(x)$ равна нулю, т. е. $f'(x) = 0$. Для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ по теореме Лагранжа получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Так как $f'(\xi) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$. Это и означает, что значения функции во всех точках промежутка одинаковы, т. е. $f(x) = C$, где C — некоторое число. ■

Теорема 7.1. *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X , т. е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда для любого $x \in X$

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

а (по лемме 7.1) это означает, что функция $\Phi(x) - F(x)$ постоянна, т. е. $\Phi(x) - F(x) = C$, где C — некоторое число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Из доказанной теоремы следует, что множество функций $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных для $f(x)$.

2. Неопределенный интеграл. Определение 2. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X , то множество функций $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом*

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $\int f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Символ $\int f(x) dx$ обозначает, таким образом, совокупность всех первообразных для функции $f(x)$. Но иногда будем понимать его как любой элемент из этой совокупности, т. е. как какую-то из первообразных.

Восстановление функции по ее производной, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции, называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

В этой главе не рассматривается вопрос существования первообразных (а значит, и неопределенных интегралов) для широких классов функций. Отметим, что в гл. 8, § 6 будет доказано, что любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную (а следовательно, и неопределенный интеграл).

Примеры.

1. $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, так как $(x^3 + C)' = 3x^2$.
2. $\int \cos x dx = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$, так как $(\ln |x| + C)' = \frac{1}{x}$.
4. $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, так как $(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C)' = e^{-2x}$, и т. д.

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие его свойства.

1°. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.*

$$(\int f(x) dx)' = f(x) \text{ и } d\int f(x) dx = f(x) dx.$$

Действительно, $(\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ и $d\int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx$.

2°. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е.*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

В самом деле, так как $dF(x) = F'(x) dx$, то $\int F'(x) dx = F(x) + C$.

3°. *Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла, т. е. если $k = \text{const} \neq 0$, то*

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $kF(x)$ — первообразная для функции $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Отсюда следует, что

$$k \int f(x) dx = k[F(x) + C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x) dx,$$

где $C_1 = kC$.

4°. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т. е.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$F'(x) = f(x), G'(x) = g(x).$$

Тогда функции $F(x) \pm G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \pm \int g(x) dx &= [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = \\ &= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)] dx. \end{aligned}$$

Отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых функций.

Таблица основных интегралов

Приведем таблицу основных интегралов. Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить дифференцированием.

I. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1).$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$

III. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

V. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1).$

VI. $\int e^x dx = e^x + C.$

VII. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

VIII. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

IX. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
($a \neq 0$).

XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} =$
 $= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*.

§ 4. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью непосредственного использования таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

Пример 1.
$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = 5 \int \cos x dx +$$
$$+ 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln |x| -$$
$$- 4 \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 2.
$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \right.$$
$$\left. + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.$$

Пример 3.
$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x -$$
$$- x + C.$$

2. Метод подстановки. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*. Он основан на следующей теореме.

Теорема 7.2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на множестве X . Рассмотрим на множестве T сложную функцию $F[\varphi(t)]$. По правилу дифференцирования сложной функции, учитывая, что $F'(x) = f(x)$, получаем

$$(F[\varphi(t)])' = F'_x[\varphi(t)] \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t),$$

т. е. функция $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ имеет на множестве T первообразную $F[\varphi(t)]$ и, следовательно,

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Замечая, что $F[\varphi(t)] + C = (F(x) + C) \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$, получаем формулу (1). ■

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интервале*.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

Решение. Положим $x-1=t$; тогда $x=t+1$. Отсюда $dx=dt$. По формуле (1)

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ = \frac{1}{2} t^2 + 3t + 3 \ln |t| - \frac{1}{t} + C.$$

Возвращаясь к переменной x , окончательно получаем

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2} (x-1)^2 + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Замечание. При замене переменной в неопределенном интеграле иногда более удобно задавать не x как функцию t , а, наоборот, задавать t как функцию от x .

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4 dx}{x^5+7}$.

Решение. Положим $x^5+7=t$, $dt=5x^4 dx$; тогда

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5+7} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln |t| + C,$$

так что

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5+7} = \frac{1}{5} \ln |x^5+7| + C.$$

Заметим, что удачный выбор подстановки обычно представляет известные трудности. Для их преодоления необходимо овладеть техникой дифференцирования и хорошо знать табличные интегралы.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x^2+a}+x=t$, откуда $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=dt$. Таким образом,

$$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x} dt,$$

так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sqrt{x^2+a}+x| + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \sin^n x \cos x dx$.

Решение. Положим $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$. Тогда

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int t^n dt = \begin{cases} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C & \text{при } n \neq -1, \\ \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C & \text{при } n = -1. \end{cases}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^n}$, $n \neq 1$.

Решение. Положим $x^2+1=t$, $2x dx=dt$; тогда

$$\int \frac{x dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C.$$

При $n=1$ аналогично получим

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

3. Метод интегрирования по частям. Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема 7.3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором промежутке X и пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда на промежутке X функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx. \quad (2)$$

Доказательство. Из равенства

$$[u(x) v(x)]' = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

следует, что

$$u(x) v'(x) = [u(x) v(x)]' - u'(x) v(x).$$

Первообразной функции $[u(x) v(x)]'$ на промежутке X является функция $u(x) v(x)$. Функция $u'(x) v(x)$ имеет первообразную на X по условию теоремы. Следовательно, и функция $u(x) v'(x)$ имеет первообразную на промежутке X . Интегрируя последнее равенство, получаем формулу (2). ■

Формула (2) называется *формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле*.

Так как $v'(x) dx = dv$, $u'(x) dx = du$, то ее можно записать в виде

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Эта формула позволяет свести вычисление $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться более простым.

$$\begin{aligned} \text{Пример 1. } \int \underbrace{\arctg x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \int dv = \int dx, v = x \end{array} \right| = \\ &= \underbrace{x \arctg x}_{\frac{v}{u} \cdot \frac{u}{u}} - \int \underbrace{x}_{\frac{v}{u}} \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{\frac{1}{du}} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{1+x^2} = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } \int x e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, \int dv = \int e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = \\ &= \int \underbrace{x}_{\frac{u}{u}} \underbrace{de^x}_{\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{du}} = \underbrace{x e^x}_{\frac{u}{u} \cdot \frac{v}{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\frac{1}{v}} \underbrace{dx}_{\frac{du}{u}} = x e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

* Здесь вертикальными черточками отделены вспомогательные записи. Отметим также, что в качестве v можно взять любую функцию вида $x + C$, где C — постоянная. Мы взяли $v = x$, т. е. $C = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Пример 3. } \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, \int dv = \int x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Иногда для вычисления интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

$$\begin{aligned} \text{Пример 4. } \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, \int dv = \int \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, \int dv = \int \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= x^2 \sin x + 2 \int x d \cos x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл $\int x^2 \cos x dx$ вычислен двухкратным интегрированием по частям.

В заключение вычислим интеграл

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$$

(n — целое положительное число), который понадобится в следующем параграфе. При $n=1$ имеем табличный интеграл

$$I_1 = \operatorname{arctg} x + C.$$

Пусть $n > 1$. Представив 1 в числителе как разность $(x^2 + 1) - x^2$, получим

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

Во втором интеграле применим метод интегрирования по частям:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad v = \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2 + 1)^{n-1}}$$

(см. п. 2, пример 5),
тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2 + 1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2 + 1)^{n-1}},$$

следовательно,

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1},$$

откуда

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Таким образом, интеграл I_n выражен через I_{n-1} :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} \quad (n > 1). \quad (3)$$

Формулы типа (3) называются *рекуррентными формулами*.

Пример 5. Вычислить $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$.

Решение. По рекуррентной формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}, \\ \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

а

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x,$$

поэтому окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3x}{8(x^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$

§ 5. Интегрирование рациональных функций

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, т. е. функции, которые можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (1)$$

где $W(x)$ — некоторый многочлен, а $R(x)$ — многочлен степени ниже, чем $Q(x)$.

Примеры.

$$1. \frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1},$$

$$2. \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения

$$Q(x) = A(x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \gamma),$$

где A — коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, а α , β , ..., γ — корни уравнения $Q(x) = 0$. Множители $(x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \gamma)$ называются *элементарными множителями*. Если среди

них имеются совпадающие, то, группируя, получаем представление

$$Q(x) = A(x - \alpha)^r (x - \beta)^s \dots (x - \gamma)^t, \quad (2)$$

где $r, s, \dots, t$ — целые числа, которые называются соответственно *кратностями корней* $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, причем $r + s + \dots + t = n$, n — степень многочлена $Q(x)$.

Среди корней представления (2) могут быть и комплексные. В алгебре доказывается, что если $\alpha = a + bi$ — r -кратный комплексный корень многочлена с вещественными коэффициентами, то этот многочлен имеет также сопряженный с α r -кратный корень $\bar{\alpha} = a - bi$. Другими словами, если в представлении (2) входит множитель $(x - \alpha)^r$, где $\alpha = a + bi$ ($b \neq 0$), то оно содержит также и множитель $(x - \bar{\alpha})^r$. Перемножив эти два множителя, получим

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^r (x - \bar{\alpha})^r &= \{[x - (a + bi)][x - (a - bi)]\}^r = \\ &= [x^2 - x(a + bi) - x(a - bi) + a^2 + b^2]^r = \\ &= [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]^r = (x^2 + 2px + q)^r, \end{aligned}$$

где $p = -a$, $q = a^2 + b^2$, $p^2 - q < 0$, p и q — вещественные числа.

Поступая аналогично с остальными комплексными корнями, запишем представление (2) в виде

$$Q(x) = A(x - \alpha)^r (x - \beta)^s \dots (x^2 + 2px + q)^t (x^2 + 2ux + v)^n \dots, \quad (3)$$

где $\alpha, \beta, \dots, p, q, u, v, \dots$ — вещественные числа.

В высшей алгебре доказывается следующая теорема.

Теорема. Если рациональная функция $\frac{R(x)}{Q(x)}$ имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен $Q(x)$ представлен в виде (3), то эту функцию можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r} + \dots \\ &\dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} + \dots, \quad (4) \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$ — некоторые вещественные числа.

Выражение (4) называется *разложением рациональной функции на элементарные дроби*.

Равенство (4) имеет место для всех x , не являющихся вещественными корнями многочлена $Q(x)$.

Чтобы определить числа $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$, умножим обе части разложения (4) с неизвестными пока $A_1, A_2, \dots$ на $Q(x)$. Поскольку равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x , то коэффициенты, стоящие при равных степенях x , должны быть равны между собой. Приравнявая их, получаем систему уравнений первой степени, из которой найдем неизвестные числа $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$.

Такой метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Пример 1. Разложить рациональную функцию $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ на элементарные дроби.

Решение. Так как $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, то по формуле (4) имеем

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

Умножая обе части равенства на x^2-5x+6 , получаем

$$2x-1 = A(x-2) + B(x-3), \text{ или } 2x-1 = (A+B)x - 2A - 3B.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений первой степени относительно A и B :

$$\begin{cases} A+B=2, \\ 2A+3B=1, \end{cases}$$

откуда $A=5$, $B=-3$.

Таким образом,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}.$$

Пример 2. Найти разложение рациональной функции $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$

на элементарные дроби.

Решение. Квадратный трехчлен x^2+1 имеет комплексные корни, поэтому по формуле (4) имеем

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Умножая обе части равенства на $x(x^2+1)^2$, получаем

$$x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)x + (Dx+E)x$$

или

$$x^2-1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.$$

Приравнявая коэффициенты при x^0 , x^1 , x^2 , x^3 и x^4 , придем к системе уравнений

$$\begin{cases} x^4: A+B=0, \\ x^3: C=0, \\ x^2: 2A+B+D=0, \\ x^1: C+E=0, \\ x^0: A=-1. \end{cases}$$

решая которую найдем $A=-1$, $B=1$, $C=0$, $D=2$, $E=0$, и поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции (1) сводится к интегрированию многочлена $W(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ интеграл от которого является табличным:

$$\int W(x) dx = a_0 \frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{x^m}{m} + \dots + a_m x + C,$$

и интегрированию рациональной функции $\frac{R(x)}{Q(x)}$, что приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов *:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln |x-\alpha| + C;$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-\alpha)^r} dx = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}} + C \quad (r > 1);$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q} dx;$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r} dx \quad (r > 1).$$

При этом многочлен $x^2+2px+q$ не имеет вещественных корней, так что $p^2-q < 0$.

Вычислим интеграл III типа, который часто встречается на практике. Выделим из трехчлена в знаменателе полный квадрат

$$x^2 + 2px + q = (x+p)^2 + q - p^2.$$

Это представление «подсказывает» подстановку $x+p=t$, откуда $x=t-p$, $dx=dt$. Положим далее $q-p^2=h>0$ и перейдем к переменной t . В результате интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q} dx = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h} dt = \frac{1}{2} A \int \frac{2t dt}{t^2+h} + (B-A \cdot p) \int \frac{dt}{t^2+h}.$$

Первый интеграл в правой части берется непосредственно

$$\int \frac{2t dt}{t^2+h} = \ln |t^2+h| + C = \ln |x^2+2px+q| + C.$$

Второй интеграл вычисляется по формуле XIII таблицы основных интегралов.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2+4x+9=(x+2)^2+5$. Сделаем подстановку $x+2=t$, откуда $x=t-2$, $dx=dt$, поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx &= \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5} dx = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5} dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5} dt = \\ &= 3 \int \frac{2t dt}{t^2+5} - 7 \int \frac{dt}{t^2+5} = 3 \ln(t^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

* Интегралы I и II типов интегрируются элементарно с помощью подстановки $t=x-\alpha$.

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} dx = 3 \ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Вычислим теперь интеграл IV типа: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r} dx$, $q-p^2 > 0$, $r > 1$. Для этого введем новую переменную z по формуле $z = (x+p)/\sqrt{q-p^2}$, откуда $x = z\sqrt{q-p^2} - p$, $dx = \sqrt{q-p^2} dz$. (5)
Далее, имеем

$$z^2 + 1 = \frac{(x+p)^2}{q-p^2} + 1 = \frac{x^2+2px+q}{q-p^2}. \quad (6)$$

Таким образом, используя подстановку (5) и принимая во внимание (6), получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r} dx &= \int \frac{A[z\sqrt{q-p^2}-p] + B\sqrt{q-p^2}}{(z^2+1)^r (q-p^2)^r} \sqrt{q-p^2} dz = \\ &= \int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r} dz = M \int \frac{z dz}{(z^2+1)^r} + N \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}, \end{aligned}$$

где M и N — числа, значения которых ясны из предпоследнего равенства.

Ко второму интегралу можно применить рекуррентную формулу [см. § 4, п. 3, формулу (3)]. Положив в первом интеграле $z^2+1=t$, получим

$$M \int \frac{z dz}{(z^2+1)^r} = \frac{M}{2} \int \frac{dt}{t^r} = -\frac{M}{2(r-1)} \frac{1}{t^{r-1}} + C = -\frac{M}{2(r-1)} \frac{1}{(z^2+1)^{r-1}} + C.$$

Пример 4. Вычислить $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx$.

Решение. Положим $z = \frac{x-1}{\sqrt{5-1}} = \frac{x-1}{2}$, откуда $x = 1 + 2z$, $dx = 2 dz$, а $x^2-2x+5 = 4(z^2+1)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \int \frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2} 2 dz = \int \frac{10z+8}{8(z^2+1)^2} dz = \\ &= \frac{5}{4} \int \frac{z dz}{(z^2+1)^2} + \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Но

$$\int \frac{z dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z^2+1}, \quad \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx &= -\frac{5}{8} \frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C = \\ &= \frac{4z-5}{8(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x , получаем

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2} dx = \frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + C.$$

Итак, установлено, что интегрирование любой рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и конечного числа элементарных дробей, интегралы от которых выражаются через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Иными словами, любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

§ 6. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Предварительно введем обозначение рациональной функции от двух переменных u и v , т. е. функции, получающейся из двух переменных u и v и некоторых постоянных, над которыми производятся только операции сложения, вычитания, умножения и деления: $R(u, v)$. Такова, например, функция

$$R(u, v) = \frac{3u^2v + u^5v^4}{u^3 + 4v^2}.$$

Если переменные u и v , в свою очередь, являются функциями переменной x : $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, то функция $R[\varphi(x), \psi(x)]$ называется рациональной функцией от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{(x^2 - 1)^2}}{x^2 - 5\sqrt{x^2 - 1}}$$

является рациональной функцией от x и от $\sqrt{x^2 - 1}$: $f(x) = R(x, \sqrt{x^2 - 1})$; здесь $R(u, v) = \frac{u + v^2}{u^2 - 5v}$, $u = x$, $v = \sqrt{x^2 - 1}$, а функция

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + 2 \cos x}$$

является рациональной функцией от $\sin x$ и от $\cos x$: $f(x) = R(\sin x, \cos x)$.

Рассмотрим теперь интегралы от некоторых простейших иррациональных и трансцендентных функций и покажем, что в ряде случаев они сводятся к интегралам от рациональных функций (или, как говорят, рационализируются) и могут быть вычислены методами, рассмотренными в § 5.

1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где a, b, c, d — некоторые числа ($\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$); m — натуральное число, R — рациональная функция от x и от $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Покажем, что такой интеграл рационализуется подстановкой

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

В самом деле,

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, x = \frac{b-dt^m}{ct^m-a}, dx = \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2} dt,$$

так что

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right) \frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция аргумента t .

Пример 1. Вычислить $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$.

Решение. Сделав подстановку $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, получим $t^2 = \frac{1+x}{1-x}$, $1-x = \frac{2}{t^2+1}$, $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \frac{4t dt}{(t^2+1)^2}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} &= 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3} \Big|_{\substack{t = \sqrt[6]{x}, x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = \\ &= 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left[(t^2 - t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = \\ &= 6 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t+1| \right] + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln (\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, где a, b, c — некоторые числа; $a \neq 0$; R — рациональная функция от x и от $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Если трехчлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) и $a > 0$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) &= R\left(x, |x-x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right) = \\ &= R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right). \end{aligned}$$

т. е. получаем интеграл, рассмотренный в п. 1.

Если $x_1 = x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-x_1| \sqrt{a},$$

т. е. под знаком интеграла находится рациональная функция от x .

Поэтому интересен случай, когда трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней и $a > 0$. Покажем, что в данном случае интеграл рационализируется подстановкой Эйлера *:

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}. **$$

Возводя обе части равенства $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ в квадрат, получаем $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$, так что

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b},$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt.$$

Таким образом,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}\right) 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t .

Если же в трехчлене $ax^2 + bx + c$ $a < 0$, а $c > 0$, то для рационализации интеграла можно применить другую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение. Поскольку трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет комплексные корни, сделаем подстановку $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$ или $x + 1 = t^2 - 2tx$; отсюда

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \quad dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2} dt.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt.$$

Далее, имеем

$$\frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{D}{(1 + 2t)^2}.$$

Умножая обе части равенства на $t(1 + 2t)^2$, получаем

$$2t^2 + 2t + 2 = A(1 + 2t)^2 + Bt(1 + 2t) + Dt, \quad \text{или}$$

$$2t^2 + 2t + 2 = (4A + 2B)t^2 + (4A + D + B)t + A.$$

* Эйлер Леонард (1707—1783) — выдающийся математик, механик, физик и астроном, член Петербургской Академии наук, большую часть жизни провел в России, по национальности швейцарец.

** Можно положить $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем систему уравнений первой степени относительно A, B, D :

$$\begin{cases} 4A + 2B = 2, \\ 4A + D + B = 2, \\ A = 2, \end{cases}$$

откуда $A = 2, B = -3, D = -3$. Следовательно,

$$\frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1+2t)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2},$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} \right] dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2} \int \frac{d(1+2t)}{1+2t} - \frac{3}{2} \int \frac{d(1+2t)}{(1+2t)^2} = \\ &= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C = 2 \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} + x| - \\ &\quad - \frac{3}{2} \ln |1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + \frac{3}{2(1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. Здесь трехчлен $1+x-x^2$ имеет комплексные корни и $a < 0, c > 0$, поэтому воспользуемся подстановкой $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$. Возводя обе части равенства в квадрат, получаем

$$1+x-x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1 \text{ или } 1-x = t^2x - 2t;$$

отсюда

$$x = \frac{1+2t}{t^2+1}, dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(t^2+1)^2} dt, \sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} &= \int \frac{2(1-t-t^2)}{\left(1 + \frac{1+2t}{t^2+1}\right) \frac{t^2+t-1}{t^2+1} (t^2+1)^2} dt = \\ &= -2 \int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2 \operatorname{arctg}(t+1) + C = \\ &= -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x-x^2} + x + 1}{x} + C. \end{aligned}$$

Заметим, что вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям и трудоемким выкладкам, поэтому их следует применять, только если данный интеграл не удастся вычислить более коротким способом.

3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R — рациональная функция от $\sin x$ и от $\cos x$. Покажем, что интеграл рационализируется подстановкой

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2},$$

так что

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t

Пример 5. Вычислить $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

Решение. Применяя подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$, получаем

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}(x/2)} + C.$$

4. Интеграл вида $\int R(e^x) dx$. Покажем, что данный интеграл рационализуется подстановкой

$$t = e^x.$$

В самом деле, так как $x = \ln t$ и $dx = \frac{dt}{t}$, то

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{dt}{t},$$

где $R(t)$ — рациональная функция от t .

Пример 6. Вычислить $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.

Решение. Полагаем $t = e^x$. Отсюда $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t+1)}{(t+1)t} dt = 2 \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = \\ &= 2 \ln(1+t) - \ln t + C = 2 \ln(1+e^x) - x + C. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что рассмотренные методы и приемы интегрирования не исчерпывают всех классов аналитически интегрируемых элементарных функций. В то же время из всего изложенного следует, что техника интегрирования сложнее по сравнению с дифференцированием. Необходимы определенные навыки и изобретательность, которые приобретаются на практике в результате решения большого числа примеров.

Отметим также, что если дифференцирование не выводит из класса элементарных функций, то при интегрировании дело обстоит иначе. Существуют такие элементарные функции (например, e^{-x^2} , $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и т. д.), первообразные от которых не являются элементарными функциями. Такие первообразные не только су-

ществуют, но и играют большую роль как в самом математическом анализе, так и в его приложениях. Они хорошо изучены, для них составлены таблицы и графики, помогающие их практическому использованию.

Если первообразная не является элементарной функцией, то говорят, что интеграл «не берется» в элементарных функциях.

ГЛАВА 8

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Обозначим это разбиение через τ , а точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ будем называть точками разбиения. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). Через Δx_i обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которую условимся называть длиной частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Образует сумму:

$$\sigma = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i . Геометрический смысл суммы σ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, если $f(x) \geq 0$ (рис. 93).

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения τ : $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$.

Определение. Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*.

Сделаем ряд пояснений, так как имеет место не совсем обычный предельный переход. В самом деле, интегральная сумма зависит от точек разбиения x_i и промежуточных точек ξ_i . Число тех и других точек стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow 0$. Поэтому само понятие предела интегральной суммы требует уточнения. Сначала дадим соответствующее определение на «языке последовательностей».

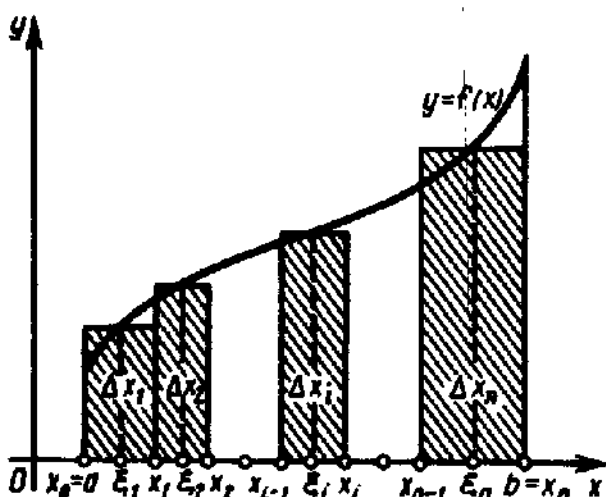


Рис. 93

Пусть отрезок $[a, b]$ последовательно разбивается на части сначала одним способом, затем — вторым, третьим и т. д., причем длина λ_k наибольшего частичного отрезка k -го разбиения стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности.

В каждом разбиении выберем произвольно промежуточные точки ξ_i . Таким образом, получаем последовательность разбиения $\{\tau_k\}$, у которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$

и можно дать определение определенного интеграла на «языке последовательностей»: функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$, у которой

$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$, соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_k\}$ стремится к одному и тому же числу I .

Можно дать определение определенного интеграла и «на языке $\varepsilon - \delta$ »: число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ (т. е. если отрезок разбит на части с длинами $\Delta x_i < \delta$) независимо от выбора точек ξ_i выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Доказательство эквивалентности обоих определений можно провести аналогично доказательству эквивалентности двух определений предела функции. Определение «на языке последовательностей» дает возможность перенести основные понятия теории пределов и на этот новый вид предела.

Из определения определенного интеграла следует, что величина интеграла (2) зависит только от вида функций $f(x)$ и от чисел a и b . Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл (2) определяется однозначно и представляет собой

некоторое число. Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т. е. от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\xi) d\xi \text{ и т. д.}$$

§ 2. Условия существования определенного интеграла

1. Ограниченность интегрируемой функции. Теорема 8.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. допустим, что $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$. Покажем, что в этом случае интегральную сумму σ можно за счет выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сделать сколь угодно большой при любом разбиении отрезка $[a, b]$.

Действительно, так как $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ она обладает этим свойством хотя бы на одном частичном отрезке разбиения, например на $[x_0, x_1]$. Выберем на остальных частичных отрезках точки $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ произвольно и обозначим

$$\sigma' = f(\xi_2) \Delta x_2 + f(\xi_3) \Delta x_3 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n.$$

Зададим произвольное число $M > 0$ и возьмем такое ξ_1 на $[x_0, x_1]$, чтобы

$$|f(\xi_1)| \geq \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}.$$

Это можно сделать в силу неограниченности функции $f(x)$ на $[x_0, x_1]$. Тогда

$$|f(\xi_1)| \Delta x_1 \geq |\sigma'| + M \text{ и } |\sigma| = |f(\xi_1) \Delta x_1 + \sigma'| \geq |f(\xi_1)| \Delta x_1 - |\sigma'| \geq M,$$

т. е. интегральная сумма σ по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа. Поэтому интегральная сумма σ не имеет конечного предела при $\lambda \rightarrow 0$, а это означает, что определенный интеграл от неограниченной функции не существует. ■

З а м е ч а н и е. Обратная теорема неверна, т. е. условие ограниченности функции $f(x)$ необходимое, но не достаточное условие интегрируемости функции. Поясним это утверждение примером. Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Функция Дирихле, очевидно, ограничена. Однако она не интегрируема на $[0, 1]$. Покажем это. Если при любом разбиении отрезка $[0, 1]$ выбрать рациональные точки $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$,

то получим

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

а если взять ξ_i иррациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким образом, при разбиении на сколь угодно малые частичные отрезки интегральная сумма может принимать как значение, равное 0, так и значение, равное 1. Поэтому интегральная сумма σ при $\lambda \rightarrow 0$ предела не имеет.

Таким образом, для существования определенного интеграла от некоторой функции $f(x)$ последняя, помимо ограниченности, должна обладать дополнительными свойствами, обеспечивающими ее интегрируемость. Для установления этих свойств необходимо ввести понятия нижних и верхних сумм.

2. Суммы Дарбу*. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и τ — разбиение этого отрезка точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. Обозначим через m_i и M_i соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани этой функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и составим следующие суммы:

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Эти суммы называются соответственно *верхней* и *нижней суммами* или *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции $f(x)$ для данного разбиения τ отрезка $[a, b]$.

Из определения нижней и верхней граней следует, что $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ при $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Отсюда

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S,$$

т. е. любая интегральная сумма и суммы Дарбу для данного разбиения связаны неравенствами

$$s \leq \sigma \leq S. \quad (1)$$

Суммы Дарбу имеют простой геометрический смысл. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$ на $[a, b]$ и криволинейную трапецию, т. е. фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$, двумя вертикальными прямыми, проведенными через

* Дарбу Гастон (1842—1917) — французский математик.

точки a и b оси Ox , и осью Ox (рис. 94 и 95). Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она непрерывна и на $[x_{i-1}, x_i]$. По второй теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ достигает на $[x_{i-1}, x_i]$ своих точных граней, и, следовательно, m_i и M_i — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на этом отрезке. Поэтому сумма S равна площади заштрихованной на рис. 94 ступенчатой фигуры, «описанной» около криволинейной трапеции, а сумма s равна площади заштрихованной на рис. 95 ступенчатой фигуры, «вписанной» в данную криволинейную трапецию.

Следует особо отметить, что суммы Дарбу зависят только от разбиения отрезка $[a, b]$, в то время как интегральная сумма σ зависит еще и от выбора точек ξ_i на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]$. При фиксированном разбиении отрезка $[a, b]$ суммы s и S — некоторые числа, а сумма σ — переменная величина, так как точки ξ_i произвольны.

3. Свойства сумм Дарбу. 1°. Для любого фиксированного разбиения τ и для любого $\varepsilon > 0$ точки ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Точки ξ_i можно выбрать также и таким образом, что интегральная сумма будет удовлетворять неравенствам $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

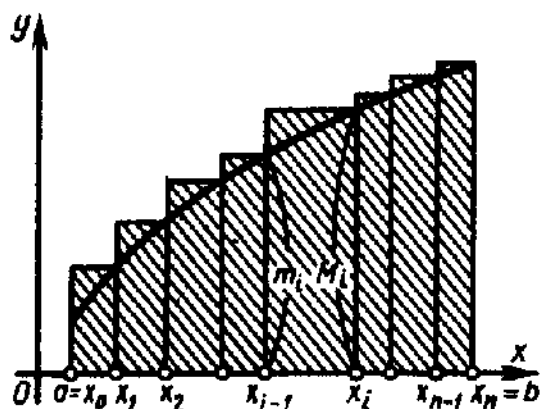


Рис. 94

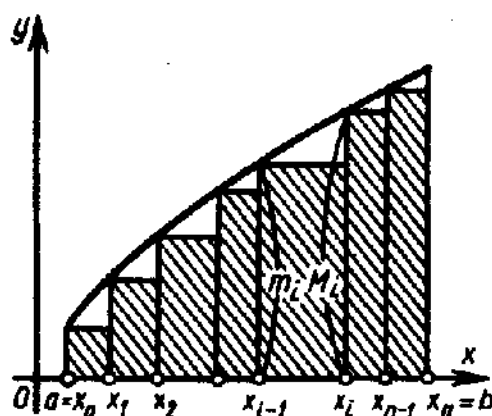


Рис. 95

Доказательство. Пусть τ — некоторое фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$. Докажем, например, неравенства $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Согласно свойству точной верхней грани M_i для данного $\varepsilon > 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ можно указать такую точку ξ_i , что

$$0 \leq M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Умножая эти неравенства на Δx_i и затем складывая, получаем $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Аналогично устанавливаются неравенства $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$. ■

2°. От добавления к данному разбиению τ отрезка $[a, b]$ новых точек разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя — не увеличивается.

Доказательство. Для доказательства достаточно ограничиться добавлением к данному разбиению τ еще одной точки

разбиения x' , так как добавление нескольких точек разбиения можно провести, добавляя их по одной. Предположим, что эта новая точка x' попала на отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ (рис. 96). Обозначим соответственно через s и s' — нижние, а через S и S' — верхние суммы Дарбу для данного разбиения τ и полученного из него добавлением точки x' разбиения τ' .

Проведем доказательство для нижних сумм Дарбу s и s' . Обозначим через m'_i и m''_i точные нижние грани функции $f(x)$ соответственно на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x', x_i]$. В сумму s входит слагаемое $m_i \Delta x_i$, а в сумму s' вместо него слагаемые $m'_i(x - x_{i-1}) + m''_i(x_i - x')$. Остальные слагаемые в суммах s и s' одинаковы. Так как $m'_i \geq m_i$, $m''_i \geq m_i$ (точная нижняя грань на части $[x_{i-1}, x_i]$ не меньше точной нижней грани на всем $[x_{i-1}, x_i]$), то

$$m'_i(x' - x_{i-1}) + m''_i(x_i - x') \geq m_i(x' - x_{i-1}) + m_i(x_i - x') = m_i \Delta x_i.$$

Отсюда следует, что $s' \geq s$.

Аналогично доказывается, что $S' \leq S$. ■

3°. Нижняя сумма Дарбу для любого разбиения τ' не превосходит верхней суммы для любого другого разбиения τ'' .

Доказательство. Пусть s' и S' , s'' и S'' — нижняя и верхняя суммы Дарбу соответственно для разбиений τ' и τ'' . Рас-

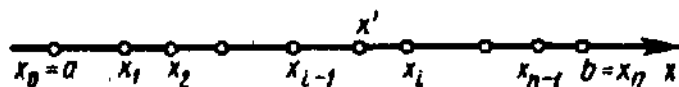


Рис. 96

смотрим разбиение τ , состоящее из всех точек, входящих в разбиения τ' и τ'' . Обозначим его суммы Дарбу через s и S . Так как разбиение τ может быть

получено из разбиения τ' добавлением к нему точек разбиения τ'' , то согласно свойству 2°, учитывая очевидное неравенство $s \leq S$, получаем

$$s' \leq s \leq S \leq S'.$$

Но разбиение τ может быть также получено из разбиения τ'' добавлением точек разбиения τ' . Поэтому

$$s'' \leq s \leq S \leq S''.$$

Сравнивая установленные неравенства, получаем $s' \leq S''$, $s'' \leq S'$. ■

4°. Множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу, а множество $\{s\}$ нижних сумм Дарбу ограничено сверху, причем точная верхняя грань множества $\{s\}$ не превосходит точную нижнюю грань множества $\{S\}$.

Доказательство. Это свойство непосредственно следует из свойства 3°. Действительно, множество всех верхних сумм Дарбу $\{S\}$ ограничено снизу, например, любой нижней суммой Дарбу s , а множество всех нижних сумм Дарбу $\{s\}$ ограничено сверху, например, любой верхней суммой Дарбу S . Поэтому по теореме 1.1 множества $\{S\}$ и $\{s\}$ имеют точные грани. Обозначим через I^* точ-

ную нижнюю грань множества $\{S\}$, а через I_* — точную верхнюю грань множества $\{s\}$:

$$I^* = \inf \{S\}, I_* = \sup \{s\}.$$

Покажем, что $I_* \leq I^*$. Пусть $I_* > I^*$. Обозначим их разность через ε , так что $I_* - I^* = \varepsilon > 0$. Из свойства точных граней I_* и I^* вытекает, что существуют числа S' и s'' , представляющие собой соответственно верхнюю и нижнюю суммы Дарбу некоторых разбиений τ' и τ'' отрезка $[a, b]$, такие, что $I^* + \varepsilon/2 > S'$ и $I_* - \varepsilon/2 < s''$. Вычитая второе неравенство из первого, получаем $S' - s'' < I^* - I_* + \varepsilon$. Но $I^* - I_* = -\varepsilon$, поэтому $S' - s'' < 0$, т. е. $s'' > S'$, что противоречит свойству 3°. Следовательно, $I_* \leq I^*$. ■

4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 8.2. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0. \quad (2)$$

Условие (2) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|S - s| < \varepsilon$. Так как $s \leq S$, то последнее неравенство равносильно неравенству

$$S - s < \varepsilon. \quad (3)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, т. е. существует определенный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения τ , удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i выполняется неравенство

$$|\sigma - I| < \varepsilon/4. \quad (4)$$

Зафиксируем любое такое разбиение τ . Для него согласно свойству 1° можно указать такие интегральные суммы σ' и σ'' , что

$$S - \sigma' \leq \varepsilon/4, \sigma'' - s \leq \varepsilon/4. \quad (5)$$

Отметим, что обе интегральные суммы σ' и σ'' удовлетворяют неравенству (4). Из соотношения

$$S - s = (S - \sigma') + (\sigma' - I) + (I - \sigma'') + (\sigma'' - s)$$

и неравенств (4) и (5) следует, что

$$S - s < \varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (3).

Достаточность. Пусть выполнено условие (3). Согласно свойству 4° $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ для любых нижних и верхних сумм Дарбу, поэтому $0 \leq I^* - I_* \leq S - s$, откуда согласно (3) следует, что $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, $I^* - I_* = 0$, т. е. $I^* = I_*$. Полагая $I = I^* = I_*$, получаем, что для любого разбиения выполняются неравенства

$$s \leq I \leq S. \quad (6)$$

Если же интегральная сумма σ и суммы Дарбу s и S отвечают одному и тому же разбиению τ , то, как известно [см. формулу (1)],

$$s \leq \sigma \leq S. \quad (7)$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$|\sigma - I| \leq S - s. \quad (8)$$

По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство (3): $S - s < \varepsilon$. Но тогда из неравенства (8) следует, что и

$$|\sigma - I| < \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta,$$

а это означает, что число I является пределом интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$, т. е. функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. ■

В дальнейшем понадобится другая форма записи необходимого и достаточного условия интегрируемости. Обозначая колебание $M_i - m_i$ функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ через ω_i , имеем

$$S - s = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i.$$

Так как $M_i \geq m_i$ и $\Delta x_i > 0$, то каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно, и условие существования определенного интеграла можно переписать так: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta.$$

В таком виде его обычно и применяют.

§ 3. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций

Теорема 8.3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Кантора она и равномерно-непрерывна на нем. Пусть дано любое $\varepsilon > 0$. Согласно следствию из теоремы Кантора для положительного числа $\varepsilon/(b-a)$ найдется $\delta > 0$ такое, что при разбиении отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, длина которых $\Delta x_i < \delta$, все колебания ω_i меньше $\varepsilon/(b-a)$.

Отсюда

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon \quad \text{при } \lambda < \delta.$$

Следовательно, для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ выполнено достаточное условие интегрируемости, а из него вытекает существование определенного интеграла.* ■

Как следует из теоремы, условие непрерывности функции является достаточным условием интегрируемости функции. Но это не означает, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Так, например, существует определенный интеграл от функций, имеющих конечное число точек разрыва. Докажем это.

Теорема 8.4. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

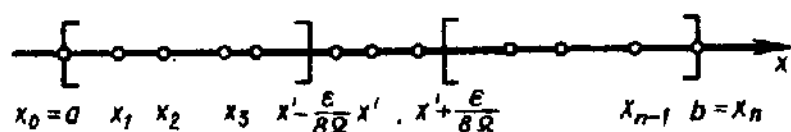


Рис. 97

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда между a и b имеется лишь одна точка разрыва x' . Пусть M и m — точные грани функции $f(x)$ на $[a, b]$, $\Omega = M - m$ — ее колебание на данном отрезке. Возьмем любое достаточно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим отрезки $[a, x' - \varepsilon/(8\Omega)]$ и $[x' + \varepsilon/(8\Omega), b]$ (рис. 97). На каждом из этих отрезков $f(x)$ непрерывна, и, следовательно, найдется $\delta' > 0$ такое, что при разбиении их на частичные отрезки $[x'_{i-1}, x'_i]$ с длинами $\Delta x'_i < \delta'$ все колебания ω'_i меньше $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Пусть $\delta = \min\{\delta', \varepsilon/(8\Omega)\}$. Рассмотрим теперь произвольное разбиение $[a, b]$ на частичные отрезки, длина которых $\Delta x_i < \delta$

(рис. 97). Для этого разбиения сумму $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$ разобьем на слагаемые $\sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i$, где в первую сумму входят частичные отрезки, лежащие целиком вне $\varepsilon/(8\Omega)$ -окрестности точки x' , а во вторую — частичные отрезки, либо заключенные целиком внутри $\varepsilon/(8\Omega)$ -окрестности точки x' , либо имеющие с ней общие точки.

Для первой суммы, как и при доказательстве предыдущей теоремы, имеем

$$\sum' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon/2,$$

что касается второй суммы, то заметим, что длины отрезков, целиком попавших внутрь $\varepsilon/(8\Omega)$ -окрестности точки x' , в сумме меньше или равны $\varepsilon/(4\Omega)$; число отрезков, лишь частично попавших в эту

* Более простое доказательство теоремы см. кн.: Шипачев В. С. «Основы высшей математики», 1994.

окрестность, не больше двух, поэтому сумма их длин меньше $2\delta \leq \leq \varepsilon/(4\Omega)$. Следовательно,

$$\sum'' \omega_i \Delta x_i \leq \Omega \sum'' \Delta x_i < \Omega \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta.$$

Это и доказывает интегрируемость функции $f(x)$ на $[a, b]$. ■

С л е д с т в и е. *Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

§ 4. Основные свойства определенного интеграла

1°. Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ был введен для случая $a < b$. Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда пределы интегрирования совпадают или нижний предел больше верхнего. По определению полагаем

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (1)$$

рассматривая эту формулу как естественное распространение понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины.

Также по определению полагаем

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad (2)$$

рассматривая формулу (2) как естественное распространение понятия определенного интеграла на случай, когда отрезок $[a, b]$ при $a < b$ пробегается в направлении от b к a . В этом случае точки разбиения x_i отрезка $[a, b]$ занумерованы в порядке следования от b к a и в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ имеют отрицательный знак.

2°. Каковы бы ни были числа a, b, c , имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3)$$

(Здесь и в § 4 и 5 предполагается, что интегралы, входящие в доказываемые формулы, существуют).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим сначала, что $a < c < b$. Так как предел интегральной суммы σ не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$, то будем разбивать $[a, b]$ так, чтобы точка c была точкой разбиения. Если, например, $c = x_m$, то σ можно раз-

бить на две суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем равенство (3).

Суть доказанного свойства состоит в том, что определенный интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям.

Доказательство для другого расположения точек a, b, c легко сводится к рассмотренному случаю. Пусть, например, $a < b < c$; тогда по доказанному имеем

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

откуда, учитывая (2), получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

т. е. опять пришли к равенству (3). ■

3°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.*

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек ξ_i

$$\sum_{i=1}^n kf(\xi_i) \Delta x_i = k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx, \end{aligned}$$

т. е. получено равенство (4). ■

4°. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ и любого выбора точек ξ_i

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \text{ и } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx,$$

то

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание. Свойство 4° имеет место для любого конечного числа слагаемых.

§ 5. Оценки интегралов. Формула среднего значения

1. Оценки интегралов (всюду в этом параграфе считаем, что $a < b$). 1°. Если всюду на отрезке $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Доказательство. В самом деле, любая интегральная сумма $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ для функции $f(x)$ на $[a, b]$ неотрицательна, так как

$$f(\xi_i) \geq 0, \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ в неравенстве $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$, получаем

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0. \blacksquare$$

2°. Если всюду на отрезке $[a, b]$ $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$$

Доказательство. Применяя оценку 1° к функции $g(x) - f(x) \geq 0$, имеем

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0.$$

Но согласно свойству 4°

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

откуда получаем неравенство (1) ■

3°. Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (2)$$

Доказательство. Применяя оценку 2° к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, получаем

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

а это равносильно неравенству (2). ■

Следствие. Если всюду на отрезке $[a, b]$ $|f(x)| \leq k$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b - a). \quad (3)$$

Действительно, из неравенства $|f(x)| \leq k$ и оценок 2° и 3° следует, что

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b k dx = k \int_a^b dx.$$

Отсюда, замечая, что

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a, \quad (4)$$

получаем соотношение (3).

4°. Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). \quad (5)$$

Доказательство. По условию для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Применяя оценку 2° к этим неравенствам, имеем

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx,$$

откуда с учетом (4) получаем неравенства (5). ■

2. Формула среднего значения. Теорема 8.5 (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad (6)$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса существуют числа m и M такие, что

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Отсюда в силу оценки 4° получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

и, следовательно,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

Положим

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \mu \quad (m \leq \mu \leq M).$$

Так как число μ заключено между наименьшими и наибольшими значениями непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$ (рис. 98), то по теореме 4.10 о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$. Поэтому

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(c),$$

а это равносильно равенству (6). ■

Равенство (6) называется *формулой среднего значения*, а величина $f(c)$ — средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

З а м е ч а н и е. Теорема о среднем имеет геометрический смысл: величина определенного интеграла при $f(x) \geq 0$ равна площади прямоугольника, имеющего высоту $f(c)$ и основание $b-a$.

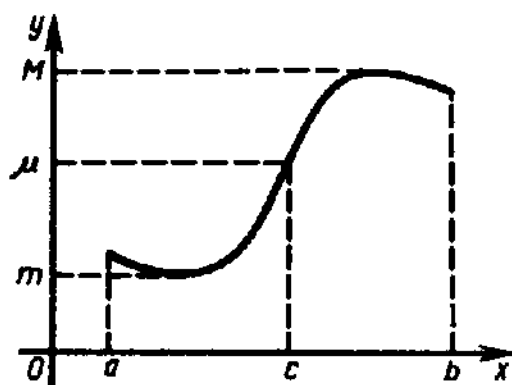


Рис. 98

§ 6. Интеграл с переменным верхним пределом

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b . Если изменять, например, верхний предел так, чтобы не выйти за пределы отрезка $[a, b]$, то величина интеграла будет изменяться. Другими словами, интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию своего верхнего предела.

Рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t) dt^*$ ($a \leq x \leq b$) с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x . Величина этого интеграла является функцией верхнего предела x . Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$, т. е. положим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

и назовем ее *интегралом с переменным верхним пределом*. Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной на рис. 99 криволинейной трапеции, если $f(x) > 0$.

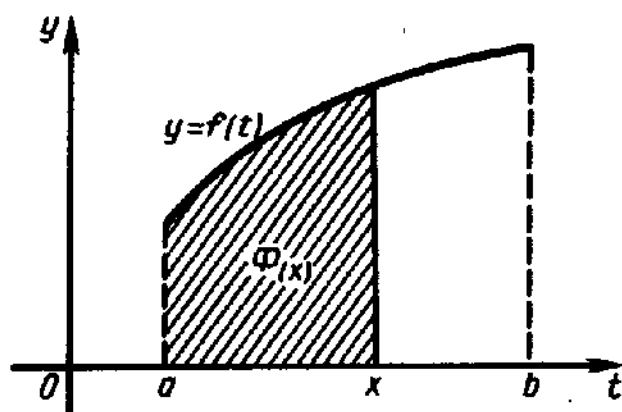


Рис. 99

Значение интеграла с переменным верхним пределом раскрывает следующая теорема.

Теорема 8.6. *Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т. е.*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (2)$$

Доказательство. Возьмем любое значение $x \in [a, b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $x + \Delta x \in [a, b]$, т. е. $a \leq x + \Delta x \leq b$. Тогда функция $\Phi(x)$, определенная выражением (1), получит новое значение:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Согласно свойству 2° определенного интеграла (см. § 4) имеем

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \Phi(x) + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

* Для удобства переменную интегрирования обозначили буквой t , так как x — верхний предел интегрирования.

Отсюда находим приращение функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Применяя теорему 8.5, получаем

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(c) \Delta x,$$

где c — число, заключенное между числами x и $x + \Delta x$. Разделим обе части равенства на Δx :

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c).$$

Если теперь $\Delta x \rightarrow 0$, то $c \rightarrow x$, и тогда, в силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$, $f(c) \rightarrow f(x)$. Поэтому, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в последнем равенстве, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

или $\Phi'(x) = f(x)$. ■

Таким образом, установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, причем функция $\Phi(x)$ — интеграл с переменным верхним пределом — является первообразной для $f(x)$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную (см. теорему 7.1), то установлена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C,$$

где C — произвольная постоянная.

§ 7. Формула Ньютона—Лейбница

Вычисление определенных интегралов методом, основанным на определении интеграла как предела интегральной суммы, как правило, связано с большими трудностями. Существует более удобный метод вычисления определенных интегралов, который, как будет показано, основан на установленной в § 6 связи между неопределенным и определенным интегралами.

Выше установлено, что функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке первообразные, причем одной из них является функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Пусть $F(x)$ — любая другая первообразная для функции $f(x)$ на том же отрезке $[a, b]$. Так как первообразные $\Phi(x)$ и $F(x)$ отличаются на постоянную, то имеет место равенство

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad a \leq x \leq b,$$

где C — некоторое число. Подставляя в это равенство значение $x=a$ и используя формулу (1) из § 4, имеем

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

т. е. для любого $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x=b$, получаем основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

которая называется *формулой Ньютона—Лейбница*.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать так:

$$F(x) \Big|_a^b \text{ или } [F(x)]_a^b$$

и поэтому формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

Подчеркнем, что в формуле (1) в качестве $F(x)$ можно взять любую первообразную для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Формула (1) дает простой метод вычисления определенного интеграла: определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной, вычисленных для верхнего и нижнего пределов интегрирования. Эта формула открывает широкие возможности для вычисления определенных интегралов, поскольку задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла, которая достаточно полно изучена.

Рассмотрим примеры.

$$1. \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

$$2. \int_0^2 (3x^2 - 1) dx = [x^3 - x]_0^2 = (2^3 - 2) - (0^3 - 0) = 6.$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} (-1) = \\ = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^3 = \ln(3 + \sqrt{10}).$$

З а м е ч а н и е. Формула Ньютона—Лейбница была выведена в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна. При некоторых условиях формула Ньютона—Лейбница имеет место и для разрывных функций.

§ 8. Замена переменной в определенном интеграле

Т е о р е м а 8.7. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда, если: 1) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ (рис. 100), то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

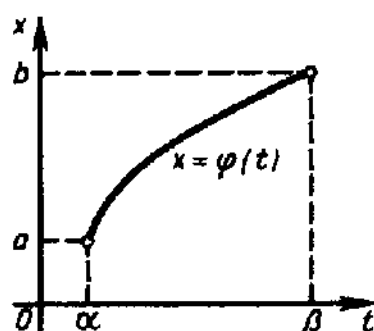


Рис. 100

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$. С другой стороны, рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ сложную функцию от переменной t : $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)] \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \Phi'(t).$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(t)$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$, и поэтому, согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \\ = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Этим доказана справедливость формулы (1). ■

Формула (1) называется *формулой замены переменной* или *подстановки в определенном интеграле*.

З а м е ч а н и е 1. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной от новой переменной t следует возвращаться к старой переменной x , то при вычислении определенного интеграла этого делать не нужно, так как теперь следует найти число, которое согласно доказанной формуле равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим подстановку $x = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Проверим законность такой подстановки.

Во-первых, функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ непрерывна на $[0, 1]$; во-вторых, функция $x = \sin t$ дифференцируема на $[0, \pi/2]$ и $x' = \cos t$ непрерывна на $[0, \pi/2]$ и, в-третьих, при изменении t от 0 до $\pi/2$ функция $x = \sin t$ изменяется от 0 до 1, причем $x(0) = 0$ и $x(\pi/2) = 1$. Таким образом, данная подстановка удовлетворяет всем условиям теоремы 8.7. Применяя формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. При использовании формулы (1) необходимо проверять выполнение перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то может быть получен и неверный результат.

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi} dx$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ формально приводит к следующему результату:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Получен неверный результат, так как $\pi \neq 0$. Это произошло потому, что функция $t = \operatorname{tg} x$ разрывна при $x = \pi/2$ и не удовлетворяет условиям теоремы 8.7.

§ 9. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема 8.8. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1)$$

Доказательство. Так как функция $u(x) v(x)$ является первообразной для функции $[u(x) v(x)]' = u(x) v'(x) + v(x) u'(x)$, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b [u(x) v'(x) + v(x) u'(x)] dx = [u(x) v(x)]_a^b.$$

Отсюда, используя свойство 4° определенных интегралов (см. § 4), получаем

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx + \int_a^b v(x) u'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b,$$

или, что то же самое,

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv \Big|_a^b$$

откуда и следует формула (1). ■

Формула (1) называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Пример 1. Вычислить $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Положим $u = \ln x$, $dv = dx$; отсюда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ и по формуле (1) находим

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = [x \ln x - x]_1^e = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 x e^x dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = e^x dx$; отсюда $du = dx$, $v = e^x$ и по формуле (1) имеем

$$\int_1^2 x e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = [e^x(x - 1)]_1^2 = e^2.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; отсюда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$, и по формуле (1) находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx &= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} = \\ &= \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

§ 10. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла

1. **Площадь криволинейной трапеции.** Пусть на плоскости Oxy дана фигура, ограниченная отрезком $[a, b]$ оси Ox , прямыми

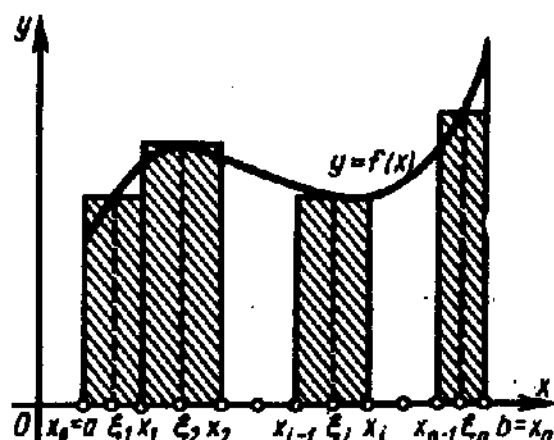


Рис. 101

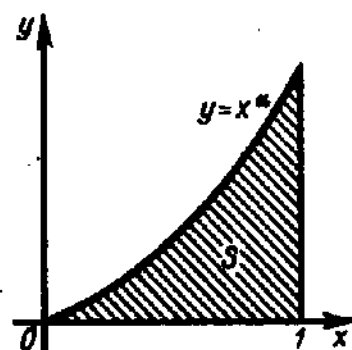


Рис. 102

$x=a$, $x=b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на $[a, b]$. Это криволинейная трапеция, площадь s^* которой может быть вычислена по формуле

$$s = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (1)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n=b$, выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольно точку $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ и рассмотрим ступенчатую фигуру (рис. 101). Площадь s криволинейной трапеции приближенно равна площади ступенчатой фигуры:

$$s \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

* О понятиях площади произвольной плоской фигуры, объема тела, площади поверхности, а также о теоремах, которые будут приниматься без доказательства, см. книгу: Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, М., 1989. Т. 1, 2.

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Естественно считать, что при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ площадь ступенчатой фигуры стремится к площади криволинейной трапеции. С другой стороны, площадь ступенчатой фигуры является интегральной суммой для интеграла (1). Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ существует и равен интегралу от функции $f(x)$ по $[a, b]$. Следовательно, и площадь s криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$ по $[a, b]$:

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \blacksquare$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ по $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$* . В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

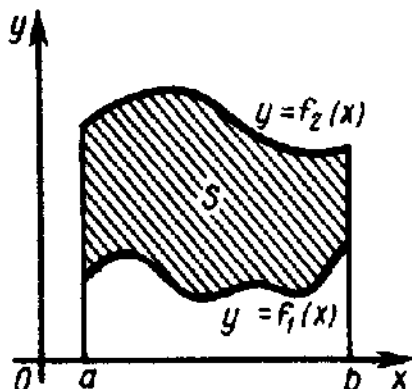


Рис. 103

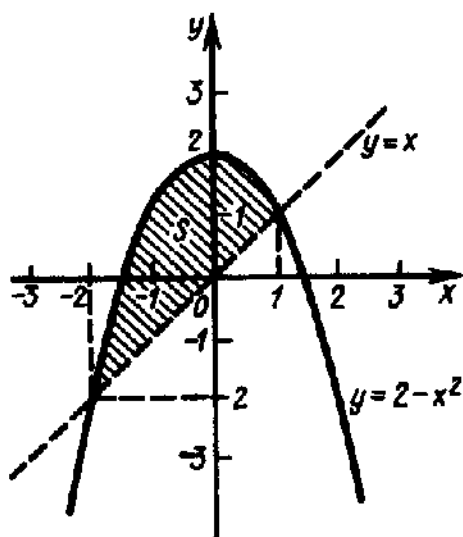


Рис. 104

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, прямой $x = 1$ и осью Ox (рис. 102).

Решение. По формуле (1) имеем

$$s = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Если $\alpha = 1$, то $s = 1/2$; если $\alpha = 2$, то $s = 1/3$, и т. д.

Пусть фигура ограничена снизу и сверху графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис. 103), где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — две непрерывные функции. Если обе функции неотрицательны, то площадь s данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$. Следовательно,

$$s = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2)$$

Заметим, что формула (2) справедлива и тогда, когда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не являются неотрицательными. В самом деле, в силу их ограниченности существует число $h > 0$ такое, что функции $f_1^*(x) = f_1(x) + h$, $f_2^*(x) = f_2(x) + h$ являются неотрицательными, и имеет место очевидное равенство

$$\int_a^b [f_2^*(x) - f_1^*(x)] dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x) = x$ и $y = f_2(x) = 2 - x^2$ (рис. 104).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения прямой $y = x$ с параболой $y = 2 - x^2$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases}$$

получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Это и есть пределы интегрирования. Искомая площадь фигуры согласно формуле (2) такова:

$$s = \int_{-2}^1 [f_2(x) - f_1(x)] dx = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

З а м е ч а н и е. Для вычисления площади криволинейной трапеции в случае, когда верхняя граница задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a$,

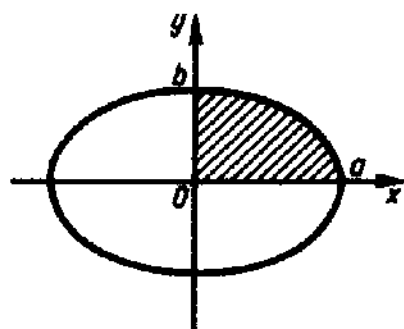


Рис. 105

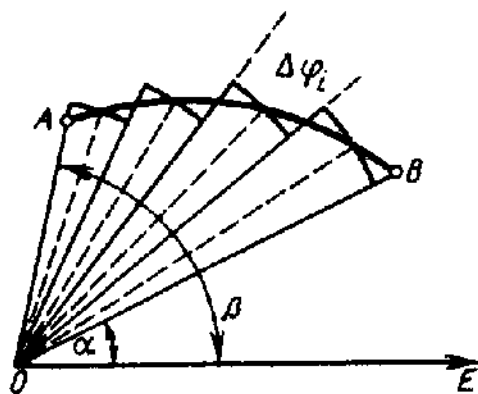


Рис. 106

$\varphi(\beta) = b$, в формуле (1) надо сделать замену переменных, положив $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$. Тогда получим

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Эллипс симметричен относительно осей координат, поэтому достаточно вычислить площадь части фигуры, находящейся в I четверти (рис. 105). Следовательно, искомая площадь равна

$$s = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

В частности, если $a=b=R$, то получаем известную формулу площади круга πR^2 .

2. Площадь криволинейного сектора. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой AB и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β , будем называть *криволинейным сектором* (рис. 106). Площадь s криволинейного сектора

$$s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (3)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \dots < \varphi_n = \beta$, выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ произвольно точку $\xi_i (\varphi_{i-1} \leq \xi_i \leq \varphi_i)$ и построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$. В результате получим веерообразную фигуру, площадь которой приближенно равна площади s криволинейного сектора:

$$s \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. С другой стороны, площадь веерообразной фигуры является интегральной суммой для интеграла (3). Так как функция $\rho^2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\varphi_i\} \rightarrow 0$ существует и равен интегралу (3).

Следовательно, и площадь криволинейного сектора численно равна этому определенному интегралу:

$$s = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \blacksquare$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда: $\rho = a\varphi$, где a — положительное число (рис. 107).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$. Поэтому по формуле (3) имеем

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

Расстояние от точки C до полюса равно $\rho = 2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC имеет площадь $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi^3 a^2 = 3S_{OABC}$, т. е. площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $\frac{1}{3}$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

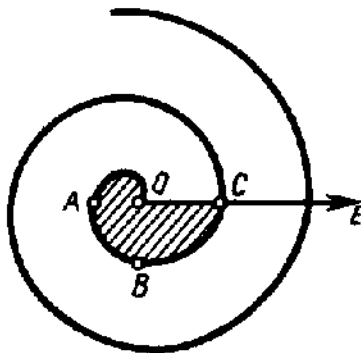


Рис. 107

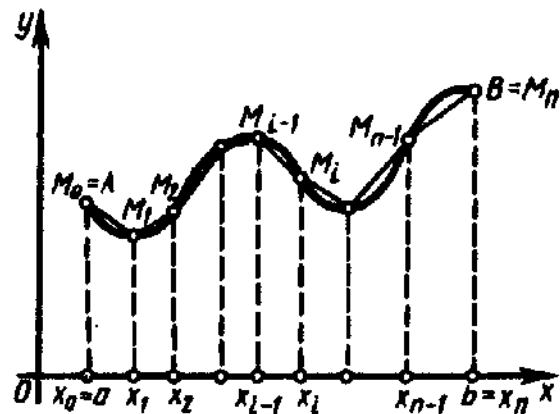


Рис. 108

3. Длина дуги кривой. Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Разобьем кривую AB на n произвольных частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{l-1}, M_l, \dots, M_n = B$ в направлении от A к B . Соединив соседние точки хордами, получим некоторую вписанную в кривую AB ломаную, длину которой обозначим через P (рис. 108). Через l_i обозначим длину одного звена $M_{i-1}M_i$ ломаной, а через μ — длину наибольшего из ее звеньев:

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \{l_i\}.$$

Определение. Число L называется пределом длин ломаных P при $\mu \rightarrow 0$ ($L = \lim_{\mu \rightarrow 0} P$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой ломаной, у которой $\mu < \delta$, выполняется неравенство

$$|L - P| < \varepsilon.$$

Если существует предел L длин P вписанных в кривую ломаных при $\mu \rightarrow 0$, то этот предел называется *длиной дуги AB* .

Если функция $f(x)$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то длина L дуги AB выражается формулой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим через $(x_i; f(x_i))$ координаты точки M_i , так что для абсцисс этих точек получим: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. Тогда длина l_i одного звена ломаной равна

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Следовательно,

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Таким образом, длина всей ломаной равна

$$P = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Правая часть равенства представляет собой интегральную сумму для интеграла (4). Функция $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ непрерывна на $[a, b]$,

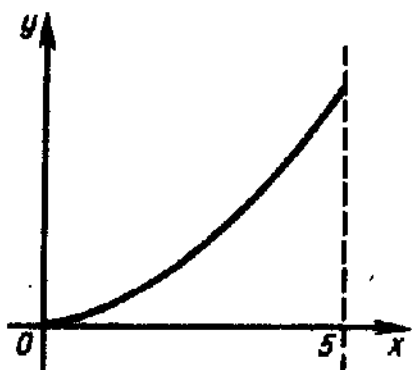


Рис. 109

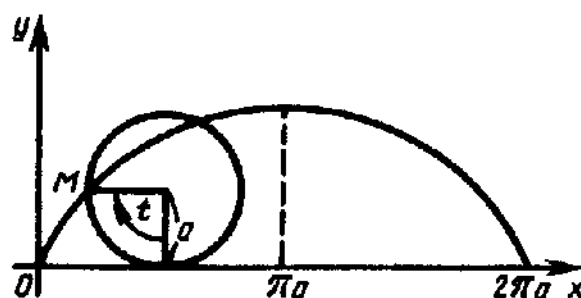


Рис. 110

поэтому предел этой суммы при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ существует и равен определённому интегралу (4). Так как $\lambda \leq \mu^*$, то $\lambda \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Следовательно,

$$L = \lim_{\mu \rightarrow 0} P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad \blacksquare$$

Пример 5. Вычислить длину дуги верхней ветви полукубической параболы $y = x^{3/2}$, если $0 \leq x \leq 5$ (рис. 109).

Решение. Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим: $y' = \frac{3}{2} x^{1/2}$. Следовательно, по формуле (4) получим

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

* $l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, откуда $|\Delta x_i| \leq l_i$.

З а м е ч а н и е 1. Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где α и β — значения параметра t , соответствующие значениям $x=a$ и $x=b$, т. е. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, в формуле $L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)} dx$ надо сделать замену переменной, положив $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t) dt$. Тогда получим

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 6. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды*: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 110).

Р е ш е н и е. Из уравнений циклоиды находим: $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$, $\psi'(t)=a \sin t$. Когда x пробегает отрезок $[0, 2\pi a]$, параметр t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$. Следовательно, искомая длина дуги

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi a} \sqrt{1+y'^2(x)} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Для вычисления длины дуги в случае, когда кривая AB задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, и точкам A и B соответствуют значения φ , равные α и β , нужно перейти от полярных координат [см. гл. 3, § 3, формулу (1)] к прямоугольным. Тогда получим параметрическое задание кривой AB уравнениями $x=\rho(\varphi) \cos \varphi$, $y=\rho(\varphi) \sin \varphi$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (φ — параметр). Так как

$x'(\varphi)=\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi$, $y'(\varphi)=\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi$, то формула (5) принимает вид

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (6)$$

Пример 7. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда: $\rho=a\varphi$ (см. рис. 107).

Р е ш е н и е. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π . Поэтому по формуле (6) искомая

* Циклоида — плоская кривая, которую описывает точка M окружности радиуса a , катящейся без скольжения по прямой линии.

длина дуги равна

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \\ = a \left[\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln (2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) \right].$$

4. Объем тела вращения. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда тело, которое образуется вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, имеет объем

$$v = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (7)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ построим прямоугольник (рис. 111). При вращении вокруг оси Ox каждый пря-

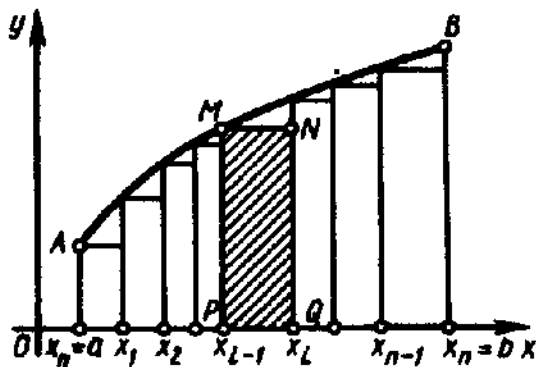


Рис. 111

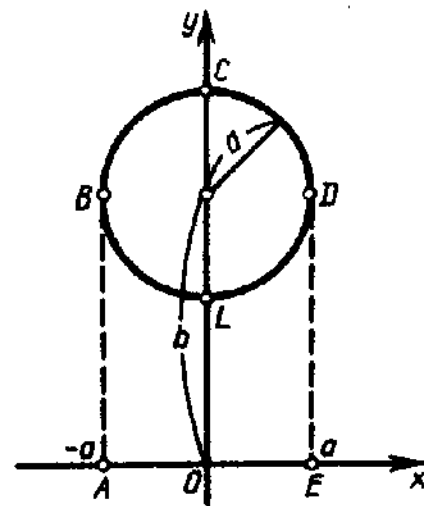


Рис. 112

моугольник опишет цилиндр. Найдем объем i -го цилиндра, образованного вращением прямоугольника $PMNQ$:

$$v_i = \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сумма объемов всех n цилиндров приближенно равна объему данного тела вращения:

$$v \approx \sum_{i=1}^n \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i$$

С другой стороны, эта сумма является интегральной суммой для интеграла (7). Так как функция $f^2(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ существует и равен определенному интегралу (7). Таким образом,

$$v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \blacksquare$$

Пример 8. Вычислить объем тора. (Тором называется тело, получающееся при вращении круга радиуса a вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии b от центра круга ($b \geq a$). Форму тора имеет, например, баранка.)

Решение. Пусть круг вращается вокруг оси Ox (рис. 112). Объем тора можно представить как разность объемов тел, полученных от вращения криволинейных трапеций $ABCE$ и $ABLD$ вокруг оси Ox .

Уравнение окружности $LBCD$ имеет вид

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2,$$

причем уравнение кривой BCD

$$y = y_1(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

а уравнение кривой BLD

$$y = y_2(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Используя формулу (7), получаем для объема v тора выражение

$$\begin{aligned} v &= 2\pi \int_0^a y_1^2 dx - 2\pi \int_0^a y_2^2 dx = 2\pi \int_0^a (y_1^2 - y_2^2) dx = \\ &= 2\pi \int_0^a [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2] dx = \\ &= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

5. Площадь поверхности вращения. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox , имеет площадь P , которая может быть вычислена по формуле

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (8)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 <$

$$< x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots$$

$\dots < x_n = b$. Пусть $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n$ — соответствующие точки графика функции $f(x)$. Построим ломаную $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ (рис. 113). При вращении этой ломаной вокруг оси Ox получим поверхность, составленную из боковых поверхностей усеченных конусов (цилиндров). Площадь боковой поверхности усеченного конуса (цилиндра), образованного вращением i -го звена ло-

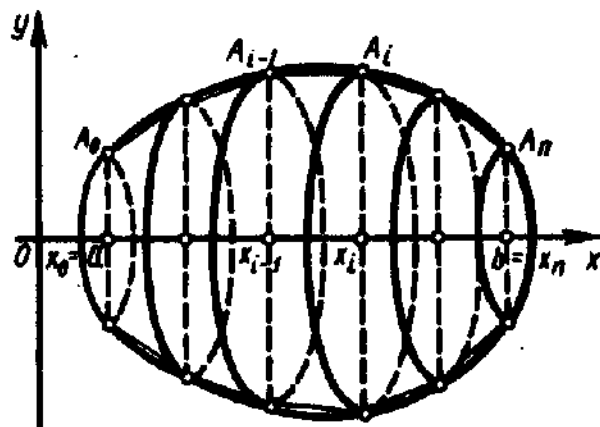


Рис. 113

маной, равна $2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} l_i$, где l_i — длина хорды $A_{i-1}A_i$, т. е.

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Полагая $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, получаем

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Итак, площадь P поверхности вращения приближенно равна площади поверхности, полученной от вращения ломаной

$$P \approx \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Представим эту сумму в виде двух сумм

$$P \approx 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i + \\ + \pi \left\{ \sum_{i=1}^n [(f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i))] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right\}. \quad (9)$$

Первая сумма в правой части последнего равенства является интегральной суммой для интеграла (8), и при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$

в силу непрерывности функции $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ имеет своим пределом этот интеграл. Покажем, что выражение в фигурных скобках в правой части равенства (9) имеет при $\lambda \rightarrow 0$ предел, равный нулю. Действительно, так как функция $f(x)$ равномерно-непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Кантора для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняются неравенства $|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| < \varepsilon$ и $|f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Если обозначить через M максимальное значение функции $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ на отрезке $[a, b]$, то выражение в фигурных скобках при $\lambda < \delta$ оценивается следующим образом:

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^n [(f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i))] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right\} \right| < \\ < 2M\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2M(b - a)\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то отсюда следует, что предел указанного выражения равен нулю при $\lambda \rightarrow 0$.

Таким образом, переходя в равенстве (9) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, имеем

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

т. е. получена искомая формула (8). ■

З а м е ч а н и е. Если поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB , заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $\psi(t) \geq 0$, $\varphi(t)$ изменяется от a до b при изменении t от α до β , $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то, производя в интеграле (8) замену переменной $x = \varphi(t)$, получаем

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (10)$$

Наконец, если кривая задана уравнением в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$, то этот случай, как уже отмечалось в п. 3, сводится к параметрическому заданию кривой $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, и формула (10) принимает вид

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Пример 9. Вычислить площадь P поверхности шарового пояса, образованного вращением полуокружности $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R < a \leq x \leq b < R$, вокруг оси Ox .

Р е ш е н и е. По формуле (8) получаем

$$P = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_a^b R dx = 2\pi R(b - a) = 2\pi R h,$$

где h — высота пояса.

Пример 10. Вычислить площадь P поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, вокруг оси Ox .

Р е ш е н и е. По формуле (10) имеем

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{(a \sin t)^2 + (a(1 - \cos t))^2} dt = \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

6. Работа переменной силы. Из рассмотренных выше задач, связанных с геометрическим применением определенного интеграла, следует, что для их решения применяется один и тот же вычислительный метод: приближенное значение искомой величины представляется в виде интегральной суммы, а затем предельным

переходом получается точное значение в виде интеграла. С помощью этого же метода решается целый ряд других задач механики, физики и техники. В качестве примера вычислим работу переменной силы.

Пусть материальная точка перемещается под действием силы F , направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину, зависящую от x . Требуется определить работу A , совершаемую силой F по перемещению материальной точки вдоль оси Ox из точки $x=a$ в точку $x=b$ ($a < b$). Функция $F(x)$ предполагается непрерывной на отрезке $[a, b]$ (рис. 114).

Разобьем произвольно отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i . Сила, действующая на материальную точку на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, изменяется от точки к точке. Но если длина отрезка мала, то значение силы в точках отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ мало отличается от ее значения в любой точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, так как $F(x)$ непре-

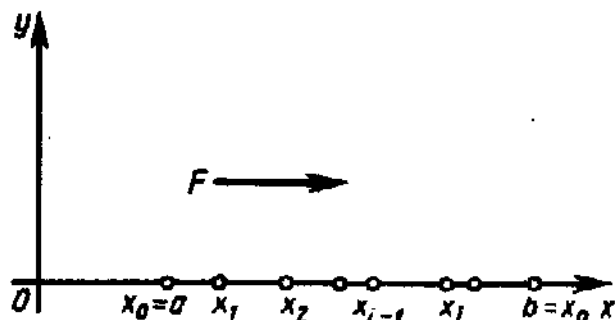


Рис. 114

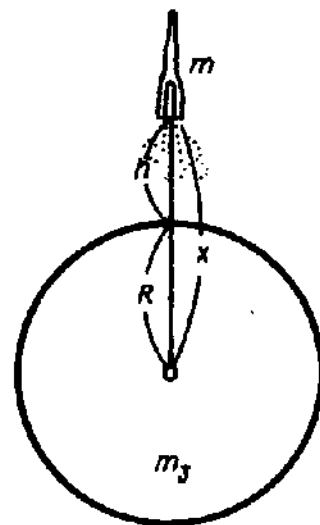


Рис. 115

рывна. Поэтому работу A_i , совершаемую силой F на $[x_{i-1}, x_i]$, можно считать приближенно равной работе, совершаемой на том же отрезке постоянной силой $F(\xi_i)$, т. е.

$$A_i \approx F(\xi_i) \Delta x_i.$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждого отрезка разбиения, получаем приближенное значение работы A силы F на всем отрезке:

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i.$$

С другой стороны, сумма в правой части равенства является интегральной суммой для функции $F(x)$. Так как функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ существует и равен определенному интегралу от функции $F(x)$ по отрезку $[a, b]$. Таким образом,

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx. \quad (11)$$

Пример 11. Определить работу A , необходимую для запуска тела массой m с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h (рис. 115).

Решение. Обозначим через F силу притяжения тела Землей. Пусть m_3 — масса Земли. Согласно закону Ньютона

$$F = G \frac{mm_3}{x^2},$$

где x — расстояние от тела до центра Земли. Полагая $Gmm_3 = K$, получаем $F(x) = K/x^2$, $R \leq x \leq h+R$, где R — радиус Земли. При $x=R$ сила $F(R)$ равна весу тела $P=mg$, т. е. $K/R^2 = P$, откуда $K=PR^2$, и $F(x) = PR^2/x^2$. Таким образом, по формуле (11) получаем

$$A = \int_R^{R+h} F(x) dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \frac{1}{x} \Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

§ 11. Несобственные интегралы

Вводя определенный интеграл как предел интегральных сумм, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то данное выше определение определенного интеграла теряет смысл. Так, в случае бесконечного отрезка интегрирования нельзя разбить отрезок на n частей конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Однако и на эти случаи можно обобщить понятие определенного интеграла. В результате такого обобщения и появилось понятие несобственного интеграла:

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a, R]$, т. е. существует определенный интеграл $\int_a^R f(x) dx$ при любом $R > a$.

Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx, \quad (1)$$

то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (2)$$

Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx.$$

В этом случае говорят, что интеграл (2) существует или сходится. Если же предел (1) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (2) не существует или расходится.

Аналогично интегралу (2) вводится несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx. \quad (3)$$

Наконец, как сумму интегралов вида (2) и (3) можно определить несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (4)$$

где c — любое число, при условии существования обоих интегралов справа.

Установим геометрический смысл несобственного интеграла первого рода. Пусть $f(x) \geq 0$. Тогда определенный интеграл

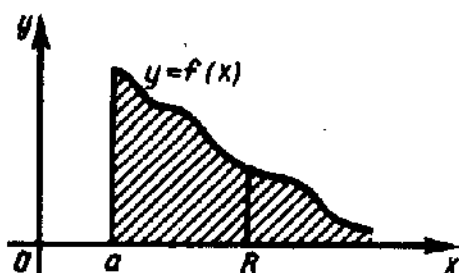


Рис. 116

грал $\int_a^R f(x) dx$ выражает площадь области, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу — осью Ox , слева — прямой $x=a$, справа — прямой $x=R$. Естественно считать, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ выражает конечную площадь бесконечной области, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу осью Ox , слева прямой $x=a$ (рис. 116). Аналогичная интерпретация имеет место для интегралов (3) и (4).

Рассмотрим несколько примеров вычисления несобственных интегралов первого рода.

$$\begin{aligned} \text{Пример 1. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

т. е. данный интеграл сходится.

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } \int_0^{+\infty} \cos x dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \cos x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \sin R, \end{aligned}$$

но предел функции $\sin R$ при $R \rightarrow +\infty$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

$$\text{Пример 3. } \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx;$$

интеграл расходится, так как

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} (e^R - 1) = \infty.$$

Пример 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, α — некоторое число.

1) Если $\alpha \neq 1$, то для любого $R > 0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Если $\alpha = 1$, то для любого $R > 0$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln R = \infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Заметим, что в рассмотренных примерах вычисление несобственного интеграла было основано на его определении.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$. Точку $x=b$ будем называть особой, если функция $f(x)$ неограничена в любой окрестности этой точки, но ограничена на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, заключенном в $[a, b)$ (рис. 117). Пусть на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$ функция $f(x)$ интегрируема, т. е. существует определенный интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при любом

$\varepsilon > 0$ таком, что $b-\varepsilon > a$. Тогда,

если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad (5)$$

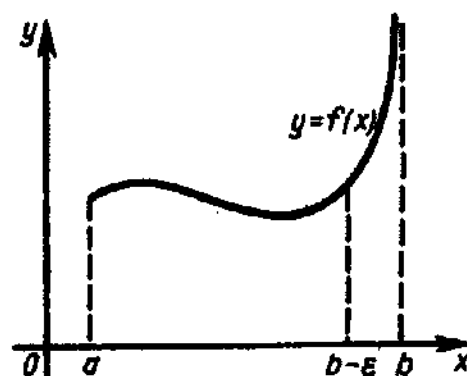


Рис. 117

то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

В этом случае говорят, что интеграл (6) существует или сходится. Если же предел (5) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (6) не существует или расходится.

Аналогично, если $x=a$ — особая точка, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c \in [a, b]$, то при условии существования обоих интегралов справа по определению полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Наконец, если a и b — особые точки, то если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется как сумма

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

где c — любая точка из (a, b) .

Пример 5. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ — некоторое число.

1) Если $\alpha \neq 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{при } \alpha > 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Если $\alpha = 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln \varepsilon) = \infty.$$

Таким образом, данный интеграл сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

3. Признак сходимости несобственных интегралов. Рассмотрим вопрос о сходимости несобственных интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Теорема 8.9 (признак сравнения несобственных интегралов). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, +\infty)$ и удовлетворяют на нем условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \tag{7}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \tag{8}$$

а из расходимости интеграла (8) следует расходимость интеграла (7).

Доказательство. Введем обозначения

$$F(R) = \int_a^R f(x) dx, \quad G(R) = \int_a^R g(x) dx.$$

Так как $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$, то в силу оценок 1° и 2° (см. § 5) справедливы неравенства

$$0 \leq F(R) \leq G(R) \text{ при } R \geq a, \quad (9)$$

и, кроме того, функция $F(R)$ [а также $G(R)$] является неубывающей на промежутке $[a, +\infty)$. В самом деле, если $a \leq R_1 \leq R_2$,

то $\int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \geq 0$ и, следовательно,

$$F(R_2) = \int_a^{R_2} f(x) dx = \int_a^{R_1} f(x) dx + \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \geq \int_a^{R_1} f(x) dx = F(R_1).$$

Пусть интеграл (7) сходится, т. е. функция $G(R)$ имеет конечный предел при $R \rightarrow +\infty$. Отсюда в силу неубывания $G(R)$ следует, что функция $G(R)$ ограничена на $[a, +\infty)$. Но тогда согласно равенству (9) и функция $F(R)$ ограничена на $[a, +\infty)$ и, следовательно, имеет на $[a, +\infty)$ точную верхнюю грань. Пусть

$\sup_{[a, +\infty)} F(R) = I$. По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R_\varepsilon \geq a$, что $0 \leq I - F(R_\varepsilon) < \varepsilon$. Так как функция $F(R)$ не убывает на $[a, +\infty)$, то для любого $R > R_\varepsilon$ выполняется неравенство $F(R) \geq F(R_\varepsilon)$ и, значит, $0 \leq I - F(R) < \varepsilon$ при $R \geq R_\varepsilon$.

Таким образом,

$$|F(R) - I| < \varepsilon \text{ при } R \geq R_\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = I$, т. е. интеграл (8) сходится.

Пусть теперь интеграл (8) расходится. Тогда, если предположить, что интеграл (7) сходится, то в силу доказанного выше интеграл (8) сходится, что противоречит условию. Следовательно, интеграл (7) также расходится. ■

З а м е ч а н и е. Аналогичный признак сравнения для несобственных интегралов второго рода можно сформулировать следующим образом: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $(a, b]$ и для всех точек x в некотором интервале $(a, a + \varepsilon)$ выполняются условия $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$, а из расхо-

мости интеграла $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x) dx$.

Пример 6. Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $\frac{1}{x^2(1+e^{-x})}$ с функцией $\frac{1}{x^2}$ на промежутке $1 \leq x < +\infty$. Очевидно, что

$$\frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}.$$

Но интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, так как $\alpha=2>1$ (см. пример 4).

Следовательно, согласно признаку сравнения сходится и данный интеграл.

Пример 7. Исследовать сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ с функцией $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $1 \leq x < +\infty$, имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x+x} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}.$$

Но интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ расходится, так как $\alpha=\frac{1}{2}<1$ (см. пример 4). Следовательно, согласно признаку сравнения и данный интеграл расходится.

4. Пример использования несобственного интеграла. Вычислим вторую космическую скорость тела, т. е. начальную скорость, при которой оно способно выйти из поля притяжения Земли в межпланетное пространство.

Ранее (см. § 10, п. 6, пример 11) с помощью определенного интеграла была вычислена работа, необходимая для запуска тела массой m с поверхности Земли на высоту h :

$$A = \int_R^{R+h} F(x) dx = \frac{PRh}{R+h},$$

Выход тела в межпланетное пространство означает запуск его на бесконечную высоту ($h=\infty$). Вычислим необходимую для этого работу:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} A = \int_R^{\infty} F(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{PRh}{R+h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{PR}{1+R/h} = PR = mgR,$$

где m — масса тела; g — ускорение свободного падения у поверхности Земли (трение и притяжение других планет при этом не учитываются). Эта работа совершается за счет изменения кинетиче-

ской энергии тела. Поэтому кинетическая энергия тела в начальный момент должна быть не меньше этой работы, т. е. начальная скорость тела v должна быть такая, чтобы

$$\frac{mv^2}{2} \geq mgR \text{ или } v \geq \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6\,400\,000} \text{ м/с} = \\ = 1,4 \cdot 8000 \text{ м/с} = 11,2 \text{ км/с.}$$

Если начальная скорость тела равна 11,2 км/с, то его траектория движения представляет собой параболу. При начальной скорости, большей 11,2 км/с, траектория будет представлять собой гиперболу, а при начальной скорости, меньшей 11,2 км/с, тело будет двигаться по эллиптической траектории, при этом либо упадет на Землю, либо станет искусственным спутником Земли.

§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических и технических задач приходится находить определенные интегралы от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это привело к необходимости вывода приближенных формул вычисления определенных интегралов. Познакомимся с двумя из них: *формулой трапеций* и *формулой парабол*.

1. Формула трапеций. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ где } f(x) \text{ — непрерывная}$$

функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда $f(x) \geq 0$. Разобьем отрезок $[a, b]$

на n равных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$ и с помощью прямых $x = x_k$ построим n прямолинейных трапеций (эти трапеции заштрихованы на рис. 118). Сумма площадей трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции, т. е.

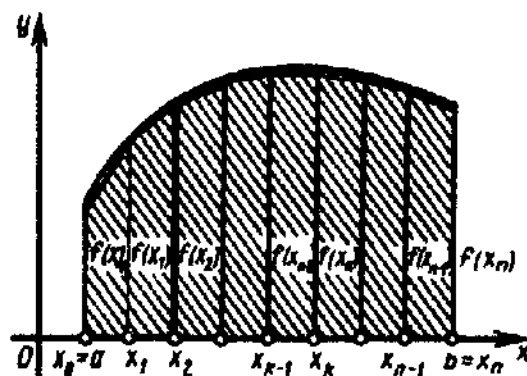


Рис. 118

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} (x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} (x_2 - x_1) + \dots + \\ + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} (x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right\},$$

где $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ — соответственно основания трапеций; $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ — их высоты.

Таким образом, получена приближенная формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right\},$$

которая и называется *формулой трапеций*. Эта формула тем точнее, чем больше n .

Рассмотрим в качестве примера интеграл $\int_0^1 x^2 dx$. Точное значение этого интеграла находится просто:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0,3333...$$

Вычислим теперь по формуле трапеций его приближенное значение. Пусть $n=5$. Тогда имеем: $a=x_0=0$, $x_1=0,2$, $x_2=0,4$, $x_3=0,6$, $x_4=0,8$, $x_5=1=b$ и соответственно $f(x_0)=0$, $f(x_1)=0,04$, $f(x_2)=0,16$, $f(x_3)=0,36$, $f(x_4)=0,64$, $f(x_5)=1$. Следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{10} \{ 1 + 2[0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64] \} = \frac{3,4}{10} = 0,34.$$

Точное значение интеграла равно 0,3333..., поэтому абсолютная ошибка меньше 0,007. Во многих технических задачах эта точность достаточна.

Если увеличить число n , то точность будет большей. Так, например, при $n=10$

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{1}{20} \{ 1 + 2 \cdot 2,85 \} = \frac{6,7}{20} = 0,335,$$

т. е. абсолютная ошибка меньше 0,002.

В более полных курсах высшей математики доказывается, что если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то абсолютная величина погрешности формулы трапеций не больше, чем

$$k \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где k — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Следует отметить, что с увеличением n увеличивается не только точность вычисления определенного интеграла, но и объем вычислительной работы. Однако здесь на помощь приходят ЭВМ.

Вычислим по формуле трапеции интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ при $n=10$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей точками $x_0=0$,

$x_1=0,1, \dots, x_9=0,9, x_{10}=1$. Вычислим приближенно значения функции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ в этих точках: $f(0)=1,0000, f(0,1)=0,9091, f(0,2)=0,8333, f(0,3)=0,7692, f(0,4)=0,7143, f(0,5)=0,6667, f(0,6)=0,6250, f(0,7)=0,5882, f(0,8)=0,5556, f(0,9)=0,5263, f(1)=0,5000$.

По формуле трапеций получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10} \left(\frac{1,0000 + 0,5000}{2} + 0,9091 + 0,8333 + \right. \\ \left. + 0,7692 + 0,7143 + 0,6667 + 0,6250 + 0,5882 + 0,5556 + 0,5263 \right) = \\ = 0,69377 \approx 0,6938.$$

Оценим погрешность полученного результата. Так как $f(x)=1/(1+x)$, то $f'(x)=-1/(1+x)^2, f''(x)=2/(1+x)^3$. На отрезке $[0, 1]$ имеем $|f''(x)| \leq 2$. Поэтому погрешность полученного результата не превосходит величины

$$\frac{k(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12 \cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0,0017.$$

Вычислим точное значение данного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0,69315.$$

Абсолютная ошибка результата, полученного по формуле трапеций, меньше 0,0007. Это находится в соответствии с данной выше оценкой погрешности.

Идею, которая была использована при построении формулы трапеций, можно использовать для получения более точных приближенных формул для вычисления определенного интеграла.

2. Формула парабол. Докажем предварительно две леммы.

Лемма 8.1. *Через любые три точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), M_3(x_3; y_3)$ с различными абсциссами можно провести единственную кривую вида*

$$y = Ax^2 + Bx + C. \quad (1)$$

Доказательство. Подставляя в уравнение параболы (1) координаты точек M_1, M_2, M_3 , получаем систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными A, B, C :

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Bx_1 + C = y_1, \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C = y_2, \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C = y_3. \end{cases}$$

Так как числа x_1, x_2, x_3 различны, то определитель этой системы (гл. 10, § 3) отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \neq 0.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение, т. е. коэффициенты A, B, C определяются однозначно. ■

Отметим, что если $A \neq 0$, то кривая (1) является параболой, если $A = 0$, то прямой.

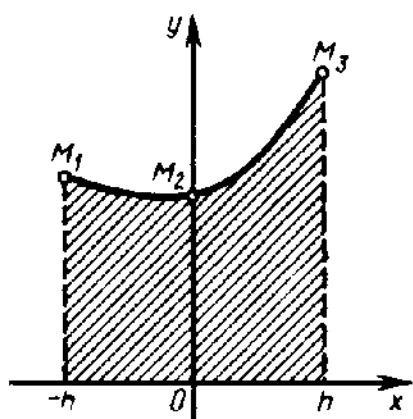


Рис. 119

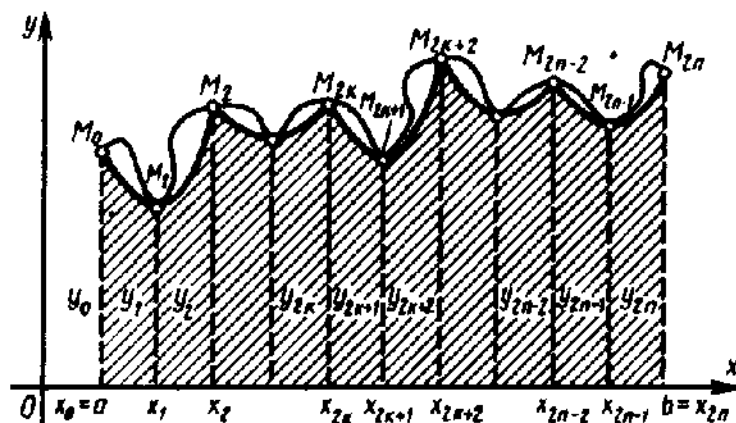


Рис. 120

Лемма 8.2. Площадь s криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = Ax^2 + Bx + C$, проходящей через точки $M_1(-h; y_1)$, $M_2(0; y_2)$, $M_3(h; y_3)$ (рис. 119), выражается формулой

$$s = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3). \quad (2)$$

Доказательство. Подставляя в уравнение $y = Ax^2 + Bx + C$ координаты точек M_1, M_2, M_3 , получаем $y_1 = Ah^2 - Bh + C$; $y_2 = C$; $y_3 = Ah^2 + Bh + C$, откуда следует, что

$$2Ah^2 + 2C = y_1 + y_3; \quad C = y_2. \quad (3)$$

Учитывая соотношения (3), имеем

$$\begin{aligned} s &= \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \int_{-h}^h (Ax^2 + C) dx + B \int_{-h}^h x dx = \\ &= 2 \int_0^h (Ax^2 + C) dx = \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Рассмотрим снова криволинейную трапецию, ограниченную произвольной кривой $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2n$ равных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2k} < x_{2k+1} < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$, а кривую $y = f(x)$ с помощью прямых $x = x_k$ на $2n$ соответствующих частей точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{2k}, M_{2k+1}, M_{2k+2}, \dots, M_{2n-2}, M_{2n-1}, M_{2n}$ (рис. 120).

Через каждую тройку точек

$$M_0 M_1 M_2, \dots, M_{2k} M_{2k+1} M_{2k+2}, \dots, M_{2n-2} M_{2n-1} M_{2n}$$

проведем кривую вида $y = Ax^2 + Bx + C$ (см. лемму 8.1). В результате получим n криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболой или прямыми (эти трапеции заштрихованы на рис. 120). Так как площадь частичной криволинейной трапеции, соответствующей отрезку $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, приближенно равна площади соответствующей «параболической» трапеции, то по формуле (2) имеем [в данном случае $h = (b - a)/(2n)$]

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}),$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Складывая почленно эти приближенные равенства, получаем приближенную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$$

или в развернутом виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})].$$

Эта формула называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона* *.

В формуле парабол значение функции $f(x)$ в нечетных точках разбиения $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ имеет коэффициент 4, в четных точках $x_2, x_4, \dots, x_{2n-2}$ — коэффициент 2 и в двух граничных точках $x_0 = a, x_{2n} = b$ — коэффициент 1.

Геометрический смысл формулы Симпсона очевиден: площадь криволинейной трапеции под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ приближенно заменяется суммой площадей фигур, лежащих под параболой (прямыми).

В полных курсах высшей математики доказывается, что если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка, то абсолютная величина погрешности формулы Симпсона не больше чем

$$M \frac{(b-a)^5}{2880n^4},$$

где M — наибольшее значение $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[a, b]$. Выше отмечалось, что погрешность формулы трапеций оценивается чис-

* Симпсон Томас (1710—1761) — английский математик.

$$k \frac{(b-a)^3}{12n^2} \left(k = \max_{[a,b]} |f''(x)| \right).$$

Так как n^4 растет быстрее, чем n^2 , то погрешность формулы Симпсона с ростом n уменьшается значительно быстрее, чем погрешность формулы трапеций. Этим и объясняется, что формула Симпсона позволяет получить большую точность, чем формула трапеций.

Для сравнения точности приближенных формул вычислим еще раз интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, но теперь по формуле Симпсона при $n=4$.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на четыре равные части точками $x_0=0$, $x_1=1/4$, $x_2=1/2$, $x_3=3/4$, $x_4=1$ и вычислим приближенно значения функции $f(x)=1/(1+x)$ в этих точках $y_0=1,0000$, $y_1=0,8000$, $y_2=0,6667$, $y_3=0,5714$, $y_4=0,5000$.

По формуле Симпсона получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} &\approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)] = \\ &= \frac{1-0}{12} [1,0000 + 0,5000 + 2 \cdot 0,6667 + 4(0,8000 + 0,5714)] \approx 0,69325. \end{aligned}$$

Оценим погрешность полученного результата. Для подынтегральной функции $f(x)=1/(1+x)$ имеем: $f^{(4)}(x)=24/(1+x)^5$, откуда следует, что на отрезке $[0, 1]$ $|f^{(4)}(x)| \leq 24$. Следовательно, можно взять $M=24$, и погрешность результата не превосходит величины $24/(2880 \cdot 4^4) < 0,0004$. Сравнивая приближенное значение с точным, заключаем, что абсолютная ошибка результата, полученного по формуле Симпсона, меньше 0,00011. Это находится в соответствии с данной выше оценкой погрешности и, кроме того, свидетельствует, что формула Симпсона значительно точнее формулы трапеций. Поэтому формулу Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов используют чаще, чем формулу трапеций.

Как отмечалось выше, приближенные формулы для вычисления определенного интеграла применяют в тех случаях, когда первообразная подынтегральной функции не выражается через элементарные функции.

Вычислим, например, интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx^*$ по формуле Симпсона с точностью до 0,001.

* Рассматриваемый интеграл не выражается через элементарные функции, но имеет большое значение в статистической физике, теории теплопроводности и диффузии.

Чтобы выбрать необходимое для получения заданной точности число $2n$, найдем $f^{(4)}(x)$. Последовательно дифференцируя функцию $f(x) = e^{-x^2}$, получаем

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3).$$

Так как на отрезке $[0, 1]$ $e^{-x^2} \leq 1$, $|4x^4 - 12x^2 + 3| \leq 5$, то $|f^{(4)}(x)| \leq 20$. Следовательно, можно взять $M = 20$. Используя формулу оценки погрешности, имеем $20/2880n^4 < 1/1000$, откуда $n^4 > 1000/144$. Для того чтобы выполнялось это неравенство, достаточно взять $n = 2$, т. е. $2n = 4$.

Разобьем теперь отрезок $[0, 1]$ на четыре равные части точками $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$ и вычислим приближенно значения функции $f(x) = e^{-x^2}$ в этих точках: $y_0 = 1,0000$, $y_1 = 0,9394$, $y_2 = 0,7788$, $y_3 = 0,5698$, $y_4 = 0,3679$. Применяя формулу Симпсона, получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{12} [1,0000 + 0,3679 + 2 \cdot 0,7788 + \\ + 4(0,9394 + 0,5698)] \approx 0,7469.$$

Таким образом, $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,747$ с точностью до 0,001. Итак, раз-

бив отрезок $[0, 1]$ всего на четыре равные части и заменив рассматриваемый интеграл суммой, стоящей в правой части формулы Симпсона, мы вычислили данный интеграл с необходимой точностью.

В заключение отметим, что каждый из изложенных методов приближенного вычисления интегралов содержит четкий алгоритм их нахождения, что позволяет широко применять эти методы для вычислений на ЭВМ. Таким образом, указанные методы — эффективное средство вычисления интегралов. Для интегралов, которые нельзя выразить через элементарные функции, с помощью ЭВМ и простейших приближенных методов можно составить таблицы их значений.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Перейдем теперь к изучению функций двух и более переменных. Предварительно ознакомимся с некоторыми понятиями аналитической геометрии в пространстве, которые используются далее для геометрической интерпретации функций нескольких переменных.

В этой части рассмотрены также такие понятия высшей алгебры, как матрица и определитель, важные не только для изучения математического анализа, но и имеющие широкое применение в других разделах математики.

ГЛАВА 9

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Прямоугольная система координат в пространстве

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве определяется заданием масштабной единицы измерения длины и трех пересекающихся в одной точке O взаимно перпендикулярных осей: Ox , Oy и Oz . Точка O — начало координат, Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

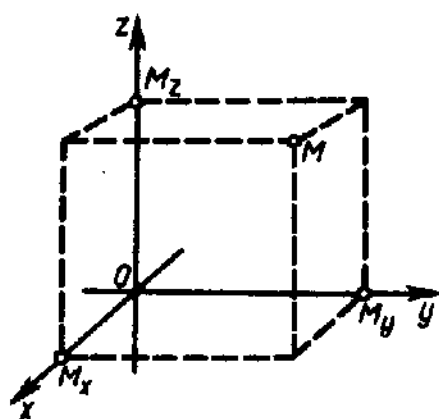


Рис. 121

Пусть M — произвольная точка пространства (рис. 121). Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные координатным осям Ox , Oy и Oz . Точки пересечения плоскостей с осями обозначим соответственно через M_x , M_y и M_z . Прямоугольными координатами точки M называются числа

$$x = OM_x, y = OM_y, z = OM_z,$$

т. е. величины направленных отрезков $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$; при этом x называется абсциссой, y — ординатой, а z — аппликатой точки M .

Таким образом, при выбранной системе координат каждой точке M пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)^*$ — ее прямоугольные координаты и, обрат-

* Тройка чисел x , y и z называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, какое — вторым и какое — третьим. В записи $(x; y; z)$ x означает первое число, y — второе, z — третье.

но, каждой упорядоченной тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует, и притом одна, точка M в пространстве.

Итак, прямоугольная система координат в пространстве устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек пространства и множеством упорядоченных троек чисел.

Плоскости Oxy , Oyz , Oxz называются *координатными плоскостями*. Они делят все пространство на восемь частей, называемых *октантами*.

§ 2. Понятие вектора

1. Скалярные и векторные величины. Многие физические величины полностью определяются заданием некоторого числа. Это, например, объем, масса, плотность, температура тела и др. Такие величины называются *скалярными*. В связи с этим числа иногда называют скалярами. Но есть и такие величины, которые определяются заданием не только числа, но и некоторого направления. Например, при движении тела следует указать не только скорость, с которой движется тело, но и направление движения. Точно так же, изучая действие какой-либо силы, необходимо указать не только значение этой силы, но и направление ее действия. Такие величины называются *векторными*. Для их описания было введено понятие вектора, оказавшееся полезным для математики.

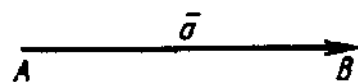


Рис. 122

2. Определение вектора. Любая упорядоченная пара точек A и B пространства определяет *направленный отрезок*, т. е. отрезок вместе с заданным на нем направлением. Если точка A первая, то ее называют началом направленного отрезка, а точку B — его концом. Направлением отрезка считают направление от начала к концу.

Определение 1. *Направленный отрезок называется вектором.*

Будем обозначать вектор символом $\overline{AB}$, причем первая буква означает начало вектора, а вторая — его конец. Вектор также обозначают и одной буквой с черточкой наверху, например $\overline{a}$. Направление вектора на рисунке указывают стрелкой (рис. 122).

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\overline{0}$ или просто 0 .

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор будем считать направленным одинаково с любым вектором; длина его равна нулю, т. е. $|\overline{0}| = 0$.

Теперь можно сформулировать важное понятие равенства двух векторов.

Определение 2. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными* ($\overline{a} = \overline{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.

На рис. 123 изображены слева неравные, а справа — равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из определения равенства векторов следует, что если данный вектор перенести параллельно самому себе, то получится вектор, равный данному. В связи с этим векторы в аналитической геометрии называют *свободными*.

3. Проекция вектора на ось. Пусть в пространстве заданы ось u и некоторый вектор $\vec{AB}$. Проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси u . Обозначим через A' и B' точки пересечения этих плоскостей с осью u (рис. 124).

Проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\vec{A'B'}$ на оси u . Напомним, что

$$\left. \begin{aligned} A'B' &= |\vec{A'B'}|, \text{ если направление } \vec{A'B'} \text{ совпадает с} \\ &\quad \text{направлением оси } u, \\ A'B' &= -|\vec{A'B'}|, \text{ если направление } \vec{A'B'} \text{ противо-} \\ &\quad \text{положно направлению оси } u. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обозначается проекция вектора $\vec{AB}$ на ось u так: $\text{пр}_u \vec{AB}$.

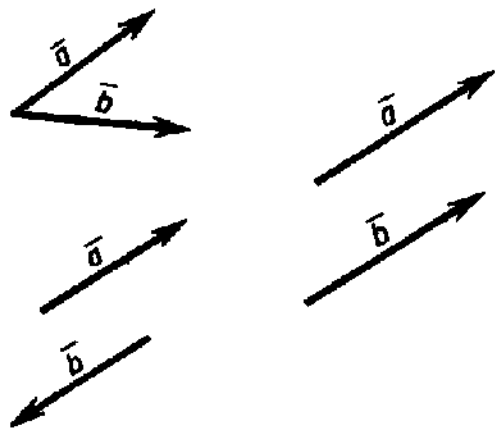


Рис. 123

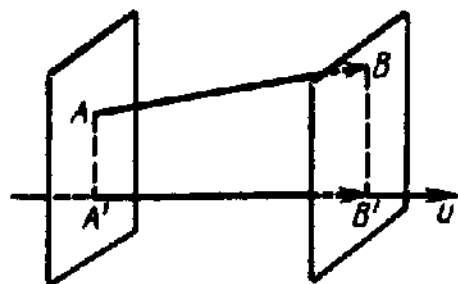


Рис. 124

Имеет место следующая теорема.

Теорема 9.1. Проекция вектора $\vec{AB}$ на ось u равна длине вектора $\vec{AB}$, умноженной на косинус угла между вектором $\vec{AB}$ и осью u , т. е.

$$\text{пр}_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi, \quad (2)$$

где φ — угол между вектором $\vec{AB}$ и осью u (рис. 125).

Доказательство. Если $\varphi \leq \pi/2$ (рис. 125, а), то в силу (1)

$$\text{пр}_u \vec{AB} = |\vec{A'B'}| = |\vec{AB}| \cos \varphi.$$

Если же $\varphi > \pi/2$ (рис. 125, б), то в силу (1) $\text{пр}_u \vec{AB} = -|\vec{A'B'}| = -|\vec{AB}| \cos (\pi - \varphi) = |\vec{AB}| \cos \varphi$.

Таким образом, для любого угла φ справедливо равенство (2). ■

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ и задана какая-то ось u . Применяя к каждому из этих векторов формулу (2), получаем

$$\text{пр}_u \overline{A_1B_1} = \text{пр}_u \overline{A_2B_2},$$

т. е. равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.

4. Проекция вектора на оси координат. Пусть в пространстве заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольный вектор $\overline{AB}$. Пусть, далее, $X = \text{пр}_x \overline{AB}$, $Y = \text{пр}_y \overline{AB}$, $Z = \text{пр}_z \overline{AB}$. Проекции X , Y , Z вектора $\overline{AB}$ на оси координат называют его *координатами*. При этом пишут

$$\overline{AB} = \{X; Y; Z\}.$$

Т е о р е м а 9.2. Каковы бы ни были две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, координаты вектора $\overline{AB}$ определяются следующими формулами:

$$X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси Ox , и обозначим точки их пересечения с осью Ox соответственно через A' и B' . Точки A' и B' на оси Ox

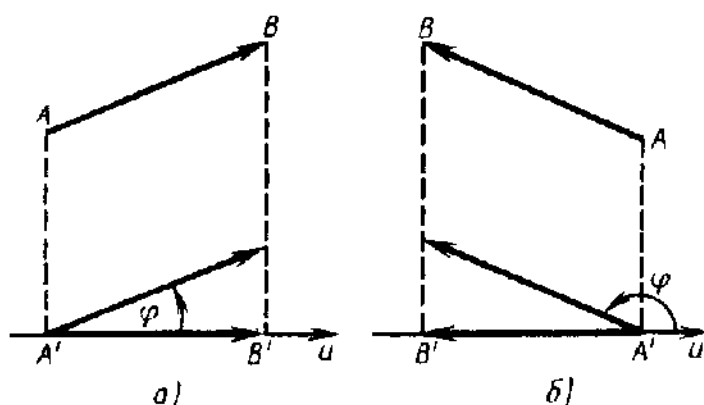


Рис. 125

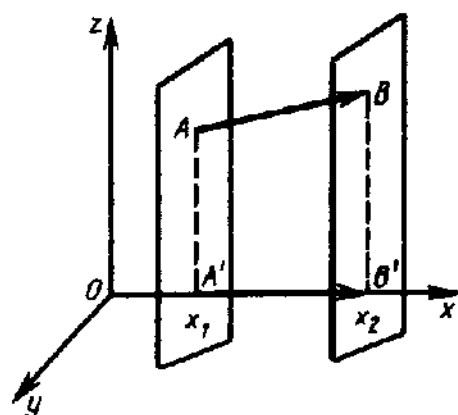


Рис. 126

имеют координаты x_1 и x_2 (рис. 126). По определению, $X = \text{пр}_x \overline{AB} = A'B'$. Но $A'B' = x_2 - x_1$ (см. гл. 1, § 3). Поэтому $X = x_2 - x_1$. Аналогично устанавливаются и остальные формулы (3). ■

З а м е ч а н и е 2. Если вектор $\overline{AB}$ выходит из начала координат, т. е. $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, и $x_2 = x$, $y_2 = y$, $z_2 = z$, то координаты X , Y , Z вектора $\overline{AB}$ равны координатам его конца:

$$X = x, Y = y, Z = z.$$

5. Направляющие косинусы вектора. Пусть дан произвольный вектор $a = \{X; Y; Z\}$; будем считать, что a выходит из начала координат и не лежит ни в одной координатной плоскости. Проведем через точку A плоскости, перпендикулярные осям. Вместе с координатными плоскостями они образуют прямоуголь-

ный параллелепипед, диагональю которого служит отрезок OA (рис. 127). Из элементарной геометрии известно, что квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его измерений. Следовательно,

$$|OA|^2 = |OA_x|^2 + |OA_y|^2 + |OA_z|^2.$$

Но $|OA| = |\vec{a}|$, $|OA_x| = |X|$, $|OA_y| = |Y|$, $|OA_z| = |Z|$; таким образом, получаем

$$|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

или

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (4)$$

Формула (4) выражает длину произвольного вектора через его координаты.

Обозначим через α , β , γ углы между вектором $\vec{a}$ и осями координат. Из формул (2) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos \beta = \\ &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \end{aligned} \quad (5)$$

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами вектора $\vec{a}$* .

Возводя в квадрат левую и правую части каждого из равенств (5) и суммируя полученные результаты, имеем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (6)$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.

В заключение пункта рассмотрим задачу. Пусть даны две произвольные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Найдём расстояние d между ними. Используя теорему 9.2 и формулу (4), сразу получаем искомый результат

$$\overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

а так как d — длина вектора $\overline{M_1 M_2}$, то

$$d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7)$$

§ 3. Линейные операции над векторами и их основные свойства

Линейными операциями над векторами называются операции сложения и вычитания векторов и умножения векторов на числа.

1. Сложение двух векторов. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, который идет из начала векто-

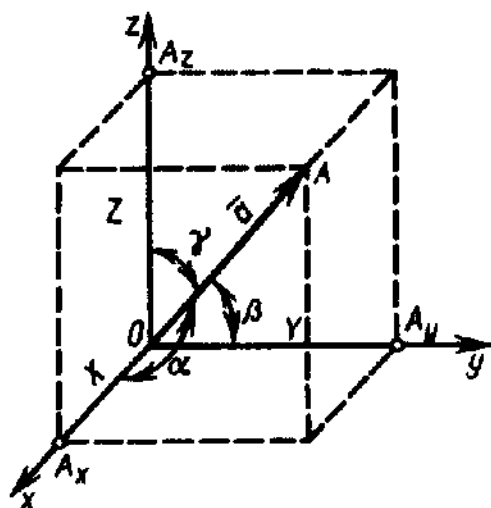


Рис. 127

ра $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 128, а).

З а м е ч а н и е 1. Действие вычитания векторов обратно действию сложения, т. е. разностью $\vec{b} - \vec{a}$ векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{a}$ дает вектор $\vec{b}$ (рис. 128, б).

З а м е ч а н и е 2. Определив сумму двух векторов, можно найти сумму любого числа данных векторов. Пусть, например, даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Сложив $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим вектор $\vec{a} + \vec{b}$. Прибавив теперь к нему вектор, $\vec{c}$, получим вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Произведение вектора на число. Пусть даны вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ и число $\lambda \neq 0$. Произведением $\lambda \vec{a}$ называется вектор, который коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет длину, равную $|\lambda| |\vec{a}|$, и направление такое же, как и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$ (рис. 129).

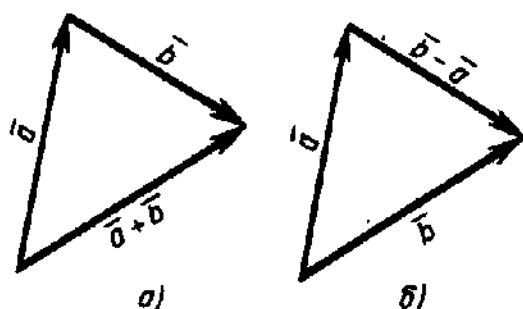


Рис. 128

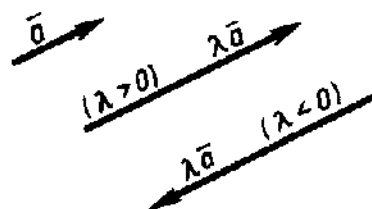


Рис. 129

Геометрический смысл операции умножения вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на число $\lambda \neq 0$ можно выразить следующим образом: если $|\lambda| > 1$, то при умножении вектора $\vec{a}$ на число λ вектор $\vec{a}$ «растягивается» в λ раз, а если $|\lambda| < 1$ — «сжимается» $1/\lambda$ раз. При $\lambda < 0$ вектор изменяет направление на противоположное. На рис. 129 изображен случай $|\lambda| > 1$.

Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то произведение $\lambda \vec{a}$ считаем равным нулевому вектору.

З а м е ч а н и е 3. Используя определение умножения вектора на число, нетрудно доказать, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует (и притом только одно) число λ такое, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ (докажите это утверждение самостоятельно).

3. Основные свойства линейных операций.

1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство сложения).

Доказательство. Приложив векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к одной точке O , построим на них параллелограмм (рис. 130). Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}, \\ \vec{b} &= \overrightarrow{OB}, \vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. ■

2°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство сложения).

Доказательство. Расположим рассматриваемые векторы так, чтобы вектор $\underline{b}$ был приложен к концу вектора $\underline{a}$, а вектор $\underline{c}$ — к концу вектора $\underline{b}$. Обозначим буквой O начало вектора $\underline{a}$, буквой A — его конец, буквой B — конец вектора $\underline{b}$ и буквой C — конец вектора $\underline{c}$ (рис. 131). Тогда

$$\begin{aligned}(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} &= (\overline{OA} + \overline{AB}) + \overline{BC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}, \\ \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) &= \overline{OA} + (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{OC} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$. ■

Рассмотрим еще три свойства линейных операций, два из которых относятся одновременно к сложению векторов и умножению вектора на число. Пусть λ и μ — произвольные числа, $\underline{a}$ и $\underline{b}$ — любые векторы. Тогда:

3°. $\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda\mu) \underline{a}$ (сочетательное свойство умножения);

4°. $(\lambda + \mu) \underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ (распределительное свойство относительно суммы чисел);

5°. $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ (распределительное свойство относительно суммы векторов).

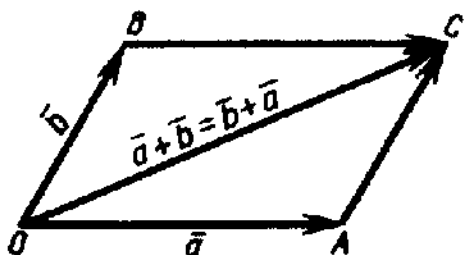


Рис. 130

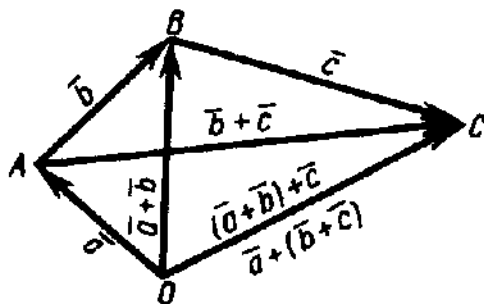


Рис. 131

Докажем свойство 3°. Если хотя бы одно из чисел λ, μ или вектор $\underline{a}$ равны нулю, то обе части равенства 3° обращаются в нуль. Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\underline{a} \neq 0$, то векторы $\lambda(\mu \underline{a})$ и $(\lambda\mu) \underline{a}$ коллинеарны, одинаково направлены (их направления либо совпадают с направлением вектора $\underline{a}$, если λ и μ имеют одинаковый знак, либо противоположны направлению вектора $\underline{a}$, если λ и μ разных знаков) и имеют одинаковые длины $|\lambda(\mu \underline{a})| = |\lambda| |\mu \underline{a}| = |\lambda| |\mu| |\underline{a}|$ и $|(\lambda\mu) \underline{a}| = |\lambda\mu| |\underline{a}| = |\lambda| |\mu| |\underline{a}|$, следовательно, они равны. ■

Докажем свойство 4°. Пусть λ и μ имеют одинаковые знаки и $\underline{a} \neq 0$. Тогда векторы $(\lambda + \mu) \underline{a}$ и $\lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ коллинеарны и одинаково направлены (при $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ их направления совпадают с направлением вектора $\underline{a}$, а при $\lambda \leq 0$, $\mu \leq 0$ противоположны направлению $\underline{a}$). Так как векторы $\lambda \underline{a}$ и $\mu \underline{a}$ направлены одинаково, то длина вектора $\lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ равна $|\lambda \underline{a} + \mu \underline{a}| = |\lambda \underline{a}| + |\mu \underline{a}| = |\lambda| |\underline{a}| + |\mu| |\underline{a}| = (|\lambda| + |\mu|) |\underline{a}|$, а так как λ и μ одного знака, то $|(\lambda + \mu) \underline{a}| = |\lambda + \mu| |\underline{a}| = (|\lambda| + |\mu|) |\underline{a}|$, т. е. длина вектора $\lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ равна длине вектора $(\lambda + \mu) \underline{a}$. Таким образом,

векторы $(\lambda + \mu)\vec{a}$ и $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины, следовательно, они равны.

Пусть теперь λ и μ имеют разные знаки и для определенности $|\lambda| > |\mu|$. В этом случае векторы $(\lambda + \mu)\vec{a}$ и $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ направлены так же, как вектор $\lambda\vec{a}$. Длина вектора $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ равна $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\lambda\vec{a}| - |\mu\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| - |\mu||\vec{a}| = (|\lambda| - |\mu|)|\vec{a}|$, а $|\lambda + \mu|\vec{a}| = |\lambda + \mu||\vec{a}| = (|\lambda| - |\mu|)|\vec{a}|$, т. е. длина вектора $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ равна длине вектора $(\lambda + \mu)\vec{a}$. Следовательно, и в этом случае векторы $(\lambda + \mu)\vec{a}$ и $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ равны. Если же $|\lambda| = |\mu|$ и знаки λ и μ различны, то обе части доказываемого равенства равны нулю. Равенство 4⁰ очевидно, если хотя бы одно из чисел λ , μ или вектор $\vec{a}$ равны нулю. ■

Докажем свойство 5⁰. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные векторы и $\lambda \geq 0$. Построим векторы $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{OA}' = \lambda\vec{a}$ и $\vec{OB}' = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ (рис. 132). Из подобия треугольников OAB и $OA'B'$ и определения операции умножения вектора на число следует, что $\vec{A'B'} = \lambda\vec{b}$,

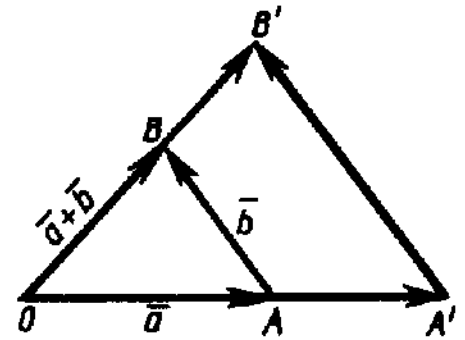


Рис. 132

а из треугольника $OA'B'$ получаем: $\vec{OA'} + \vec{A'B'} = \vec{OB'}$. Таким образом, $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$, т. е. доказываемое равенство справедливо. Случай $\lambda < 0$ рассматривается аналогично.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы и $\vec{a} \neq 0$, то вектор $\vec{b}$ можно представить в виде $\vec{b} = \mu\vec{a}$, и искомое равенство следует из равенств 3⁰ и 4⁰. Действительно, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \mu\vec{a}) = \lambda(1 + \mu)\vec{a} = (\lambda + \lambda\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda\mu\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$. Доказываемое равенство очевидно, если один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ или число λ равны нулю. ■

З а м е ч а н и е 4. Доказанные свойства линейных операций имеют фундаментальное значение, так как дают возможность производить над векторами обычные алгебраические действия. Например, в силу свойств 4⁰ и 5⁰ можно выполнять умножение скалярного многочлена на векторный многочлен «почленно».

§ 4. Теоремы о проекциях векторов

Т е о р е м а 9.3. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось, т. е.

$$\text{пр}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{пр}_u \vec{a}_1 + \text{пр}_u \vec{a}_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки A и A_1 — соответственно начало и конец вектора $\vec{a}_1$, точки A_1 и A_2 — начало и конец вектора $\vec{a}_2$ (рис. 133). Обозначим через A' , A'_1 и A'_2 соответственно проекции на ось u точек A , A_1 и A_2 . По определению, $\text{пр}_u \vec{a}_1 = A'A'_1$, $\text{пр}_u \vec{a}_2 = A'_1A'_2$, $\text{пр}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{пр}_u \vec{AA}_2 = A'A'_2$. Согласно основному тождеству (см. гл. 1, § 3) $A'A'_2 = A'A'_1 + A'_1A'_2$. Отсюда $\text{пр}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{пр}_u \vec{a}_1 + \text{пр}_u \vec{a}_2$. ■

Теорему можно обобщить на случай любого числа слагаемых.

Теорема 9.4. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е.

$$\text{пр}_u \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_u \vec{a}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть φ — угол между вектором $\vec{a}$ и осью u , а φ' — угол между вектором $\lambda \vec{a}$ и осью u (рис. 134). Тогда, если $\lambda > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\lambda \vec{a}$ направлены одинаково и $\varphi = \varphi'$. Если же $\lambda < 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\lambda \vec{a}$ имеют противоположные направления и $\varphi' = \pi - \varphi$. По теореме 9.1 имеем: при $\lambda > 0$

$$\text{пр}_u \lambda \vec{a} = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi' = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi' = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \text{пр}_u \vec{a};$$

при $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} \text{пр}_u \lambda \vec{a} &= |\lambda \vec{a}| \cos \varphi' = |\lambda| |\vec{a}| \cos \varphi' = -\lambda |\vec{a}| \cos (\pi - \varphi) = \\ &= -\lambda |\vec{a}| (-\cos \varphi) = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \text{пр}_u \vec{a}; \end{aligned}$$

при $\lambda = 0$ равенство (1) очевидно. Таким образом, при любом λ $\text{пр}_u \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_u \vec{a}$. ■

Из доказанных теорем вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Из теоремы 9.3 вытекает, что если $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то $\vec{a} + \vec{b} = \{X_1 + X_2; Y_1 + Y_2; Z_1 + Z_2\}$.

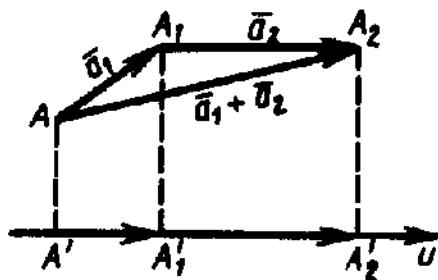


Рис. 133

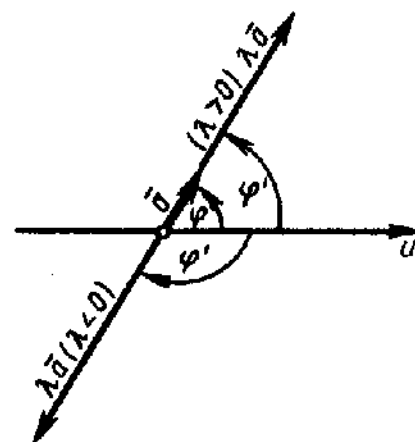


Рис. 134

Следствие 2. Из теоремы 9.4 вытекает, что если $\vec{a} = \{X; Y; Z\}$, то $\lambda \vec{a} = \{\lambda X; \lambda Y; \lambda Z\}$ для любого числа λ .

Отсюда легко выводится условие коллинеарности двух векторов в координатах. В самом деле, равенство $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ равносильно равенствам $X_2 = \lambda X_1$, $Y_2 = \lambda Y_1$, $Z_2 = \lambda Z_1$ или

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (2)$$

т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны в том и только в том случае, когда их координаты пропорциональны.

§ 5. Разложение вектора по базису

Пусть векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы осей координат, т. е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, и каждый из них одинаково направлен с соответствующей осью координат (рис. 135). Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется *базисом*. Имеет место следующая теорема.

Теорема 9.5. *Любой вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом разложен по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т. е. представлен в виде*

$$\vec{a} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}, \quad (1)$$

где λ, μ, ν — некоторые числа.

Доказательство. Приложив вектор $\vec{a}$ к началу координат, обозначим его конец через A . Проведем через точку A плоскости, перпендикулярные осям координат. Пусть A_x, A_y, A_z — точки пересечения этих плоскостей с осями координат. По определению сложения векторов имеем

$$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OA}_z, \quad \vec{OB} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y. \quad (2)$$

Из равенств (2) получаем

$$\vec{a} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y + \vec{OA}_z. \quad (3)$$

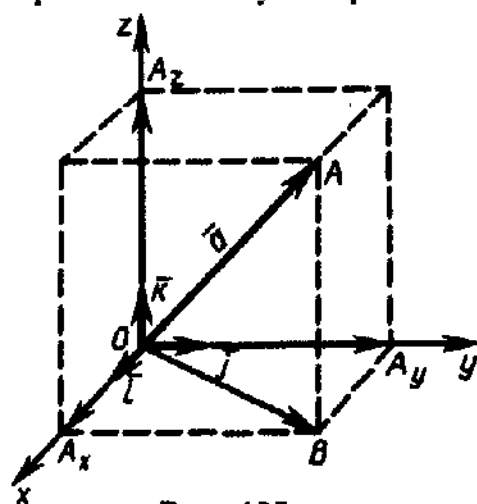


Рис. 135

Так как векторы $\vec{OA}_x$ и $\vec{i}$, $\vec{OA}_y$ и $\vec{j}$, $\vec{OA}_z$ и $\vec{k}$ коллинеарны, то

$$\vec{OA}_x = \lambda \vec{i}, \quad \vec{OA}_y = \mu \vec{j}, \quad \vec{OA}_z = \nu \vec{k}, \quad (4)$$

где λ, μ, ν — некоторые числа.

Из равенства (3) и соотношений (4) получаем

$$\vec{a} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}.$$

Для доказательства единственности представления (1) установим, что

$$\lambda = X, \quad \mu = Y, \quad \nu = Z,$$

где X, Y, Z — координаты вектора $\vec{a}$.

Покажем, например, что $\lambda = X$. Так как $X = |\vec{OA}_x|$, если $\vec{OA}_x$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{i}$, и $X = -|\vec{OA}_x|$, если вектор $\vec{OA}_x$ имеет направление, противоположное направлению вектора $\vec{i}$, то $\vec{OA}_x = X \vec{i}$. Сравнивая с равенством $\vec{OA}_x = \lambda \vec{i}$, получаем $\lambda = X$.

Аналогично показывается, что $\mu = Y$ и $\nu = Z$. ■

§ 6. Скалярное произведение векторов

1. Определение и основные свойства скалярного произведения.

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин

этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол не определен и скалярное произведение по определению полагают равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Итак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 136).

Так как $|\vec{a}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, то можно записать

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}. \quad (1)$$

Типичным примером скалярного произведения в физике является формула работы

$$A = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где вектор $\vec{a}$ — сила, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{b}$ (рис. 137).

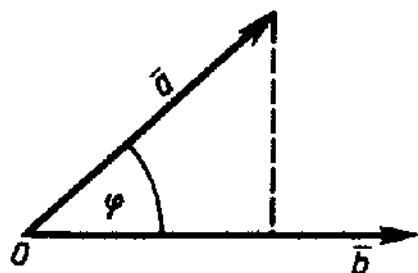


Рис. 136

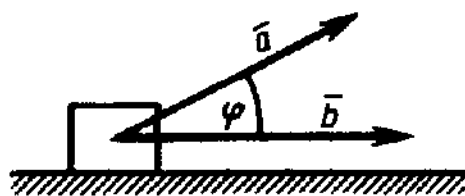


Рис. 137

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения.

1°. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (свойство перестановочности сомножителей).

Доказательство. По определению скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ и $\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \varphi$, но $|\vec{a}| |\vec{b}| = |\vec{b}| |\vec{a}|$, поскольку это произведение чисел. Следовательно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. ■

2°. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (свойство сочетательности относительно умножения на число).

Доказательство. По формуле (1) имеем

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}),$$

но согласно теореме 9.4

$$\text{пр}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}) = \lambda \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Таким образом,

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} (\lambda \vec{a}) = |\vec{b}| \lambda \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda (|\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}).$$

С другой стороны, по той же формуле (1)

$$|\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Следовательно, $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (|\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$. ■

З а м е ч а н и е 1. Из свойств 1^0 и 2^0 следует, что $(\lambda \overline{a}) \cdot (\mu \overline{b}) = (\lambda \cdot \mu)(\overline{a} \cdot \overline{b})$. Действительно, $(\lambda \overline{a}) \cdot (\mu \overline{b}) = \lambda[\overline{a} \cdot (\mu \overline{b})] = \lambda[(\mu \overline{b}) \cdot \overline{a}] = \lambda[\mu(\overline{b} \cdot \overline{a})] = (\lambda \cdot \mu)(\overline{a} \cdot \overline{b})$.

3^0 . $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$ (свойство распределительности суммы векторов).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле (1)

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}),$$

но согласно теореме 9.3

$$\operatorname{pr}_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{b} + \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{c}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) &= |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| (\operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{b} + \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{c}) = \\ &= |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{b} + |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{c}. \end{aligned}$$

С другой стороны, по той же формуле (1)

$$|\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \text{ и } |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c}.$$

Следовательно,

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{b} + |\overline{a}| \operatorname{pr}_{\overline{a}} \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е 2. Доказанное свойство дает право при скалярном умножении векторных многочленов выполнять действия почленно. В силу свойства 1^0 можно при этом не заботиться о порядке сомножителей, а свойство 2^0 позволяет (см. замечание 1) объединить числовые коэффициенты векторных сомножителей. Например,

$$\begin{aligned} (2\overline{a} + 5\overline{b}) \cdot (3\overline{c} + 4\overline{d}) &= (2\overline{a} + 5\overline{b}) \cdot (3\overline{c}) + (2\overline{a} + 5\overline{b}) \cdot (4\overline{d}) = \\ &= (2\overline{a}) \cdot (3\overline{c}) + (5\overline{b}) \cdot (3\overline{c}) + (2\overline{a}) \cdot (4\overline{d}) + (5\overline{b}) \cdot (4\overline{d}) = \\ &= 6\overline{a} \cdot \overline{c} + 15\overline{b} \cdot \overline{c} + 8\overline{a} \cdot \overline{d} + 20\overline{b} \cdot \overline{d}. \end{aligned}$$

$$4^0. \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению скалярного произведения $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| |\overline{a}| \cos 0 = |\overline{a}|^2$, если $|\overline{a}| \neq 0$, т. е. если $\overline{a} \neq \overline{0}$. Если же $\overline{a} = \overline{0}$, то также, по определению, $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$. Но в этом случае $|\overline{a}| = 0$ и, значит, равенство $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$ также справедливо. $\blacksquare$

Скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^2$. На основании только что доказанного мы имеем: $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$; отсюда, в частности, $\sqrt{\overline{a}^2} = |\overline{a}|$.

5^0 . $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, если $\overline{a} \perp \overline{b}$, и, обратно, $\overline{a} \perp \overline{b}$, если $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ и $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению скалярного произведения $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| |\overline{b}| \cos \varphi$. Если $\varphi = \pi/2$, т. е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны друг другу, то $\cos \varphi = 0$; отсюда $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Обратно, если $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ и $|\overline{a}| |\overline{b}| \neq 0$, то $\cos \varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, т. е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны. $\blacksquare$

Замечание 3. Из свойств 4⁰ и 5⁰ для базисных векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (рис. 138) непосредственно получаем следующие равенства:

$$\overline{i}^2 = \overline{j}^2 = \overline{k}^2 = 1, \quad \overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{k} \cdot \overline{i} = \overline{k} \cdot \overline{j} = 0. \quad (2)$$

2. Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Теорема 9.6. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то их скалярное произведение определяется формулой

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Доказательство. Разложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по базису $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$: $\overline{a} = X_1 \overline{i} + Y_1 \overline{j} + Z_1 \overline{k}$, $\overline{b} = X_2 \overline{i} + Y_2 \overline{j} + Z_2 \overline{k}$. Используя замечание 2, получаем

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} = & X_1 X_2 \overline{i}^2 + X_1 Y_2 \overline{i} \cdot \overline{j} + X_1 Z_2 \overline{i} \cdot \overline{k} + \\ & + Y_1 X_2 \overline{j} \cdot \overline{i} + Y_1 Y_2 \overline{j}^2 + Y_1 Z_2 \overline{j} \cdot \overline{k} + \\ & + Z_1 X_2 \overline{k} \cdot \overline{i} + Z_1 Y_2 \overline{k} \cdot \overline{j} + Z_1 Z_2 \overline{k}^2. \end{aligned}$$

Откуда, используя равенства (2), находим: $\overline{a} \cdot \overline{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$. ■

Из теоремы 9.6 вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ является равенство

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0. \quad (3)$$

Это утверждение непосредственно следует из свойства 5⁰ и теоремы 9.6.

Следствие 2. Угол между векторами $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (4)$$

Действительно, по определению скалярного произведения $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| |\overline{b}| \cos \varphi$, откуда

$$\cos \varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|}. \quad (5)$$

В силу теоремы 9.6 и формулы (4) § 2 из формулы (5) следует формула (4).

Пример. Даны три точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 1)$ и $C(2; 1; 2)$. Найти угол $\varphi = \angle BAC$.

Решение. Применяя теорему 9.2, найдем $\overline{AB} = \{1; 1; 0\}$, $\overline{AC} = \{1; 0; 1\}$. Отсюда на основании формулы (4) получаем

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.

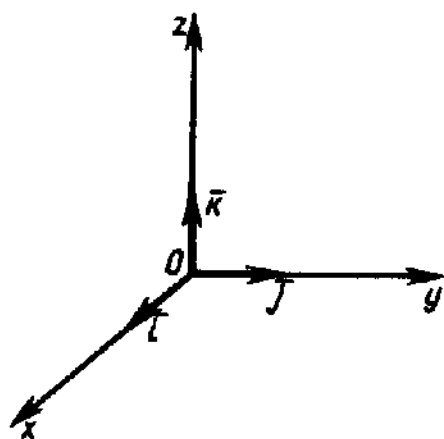


Рис. 138

§ 7. Векторное произведение

1. Определение векторного произведения. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Тройка векторов называется *упорядоченной*, если указано, какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим. Например, в записи $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ вектор $\vec{a}$ считается первым, $\vec{b}$ — вторым, $\vec{c}$ — третьим; в записи $(\vec{b}; \vec{c}; \vec{a})$ вектор $\vec{b}$ — первый, $\vec{c}$ — второй, $\vec{a}$ — третий.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

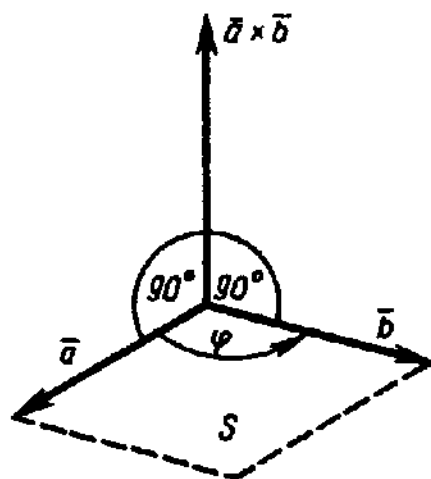


Рис. 139

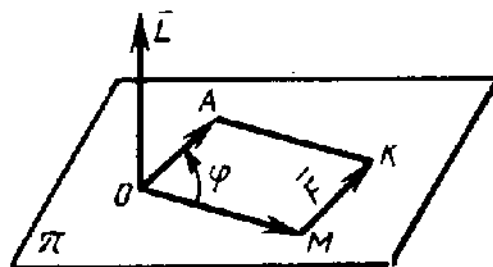


Рис. 140

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, который определяется тремя условиями:

- 1) длина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ равна $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют правую тройку векторов (рис. 139).

Заметим, что условия 2) и 3) относятся к случаю, когда $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \neq 0$, т. е. вектор $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$. Если же $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 0$ (т. е. либо, по крайней мере, один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, либо $\sin \varphi = 0$), то векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ определяется только условием 1): в этом случае $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Понятие векторного произведения имеет свой источник в механике.

Пусть в точке M твердого тела приложена сила $\vec{F} = \vec{MK}$ и O — некоторая точка пространства. Как известно из механики, моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O (точка приложения момента) называется вектор $\vec{L}$, который: 1) имеет длину, равную $|\vec{OM}| |\vec{MK}| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{OM}$ и $\vec{MK}$; 2) перпендикулярен плоскости π , проходящей через точки O , M , K ; 3) направлен так, что из конца его сила $\vec{F}$ представляется вращающей плоскость π вокруг точки O против часовой стрелки

(рис. 140). Из рисунка, на котором $\overline{OA} = \overline{MK}$, видно, что $\overline{L}$ представляет собой векторное произведение $\overline{OM} \times \overline{MK}$.

2. Основные свойства векторного произведения.

1°. $\overline{a} \times \overline{b} = 0$, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — коллинеарные векторы.

Доказательство. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\sin \varphi = 0$. Следовательно, $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| |\overline{b}| \sin \varphi = 0$, т. е. длина вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ равна нулю, а значит, и сам вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ равен нулю. ■

2°. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна площади s параллелограмма, построенного на этих векторах (см. рис. 139).

Доказательство. Как известно из элементарной геометрии, площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними. Отсюда $|\overline{a}| |\overline{b}| \sin \varphi = s$, т. е. $|\overline{a} \times \overline{b}| = s$. ■

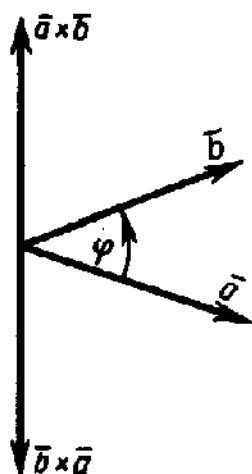


Рис. 141

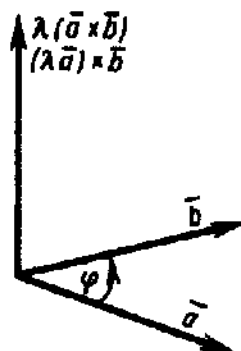


Рис. 142

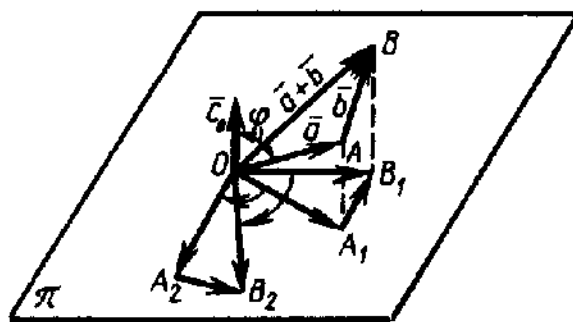


Рис. 143

3°. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (свойство антиперестановочности сомножителей).

Доказательство. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то свойство очевидно. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Из определения векторного произведения следует, что векторы $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b} \times \overline{a}$ имеют одинаковые длины (длина векторного произведения не зависит от порядка сомножителей), коллинеарны (они перпендикулярны одной и той же плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$), но направлены противоположно (рис. 141), так как векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{b} \times \overline{a}$ образуют правые тройки. Следовательно, $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$. ■

4°. $(\lambda \overline{a}) \times \overline{b} = \lambda (\overline{a} \times \overline{b})$ (свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю).

Доказательство. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны или $\lambda = 0$, то свойство очевидно. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны и $\lambda \neq 0$. Из определения векторного произведения следует, что $|\lambda (\overline{a} \times \overline{b})| = |\lambda| |\overline{a}| |\overline{b}| \sin \varphi$ и $|(\lambda \overline{a}) \times \overline{b}| = |\lambda| |\overline{a}| |\overline{b}| \sin \varphi$, поэтому векторы $(\lambda \overline{a}) \times \overline{b}$ и $\lambda (\overline{a} \times \overline{b})$ имеют одинаковую длину. Кроме этого, они перпендикулярны к каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и, значит, кол-

линейны друг другу. Наконец, они одинаково направлены (рис. 142) (при $\lambda > 0$ это очевидно, так как одинаковое направление имеют векторы $\lambda \underline{a}$ и $\underline{a}$; при $\lambda < 0$ векторы $\lambda \underline{a}$ и $\underline{a}$ имеют противоположные направления, поэтому вектор $(\lambda \underline{a}) \times \underline{b}$ направлен противоположно вектору $\underline{a} \times \underline{b}$, но при этом вектор $\lambda(\underline{a} \times \underline{b})$ также направлен противоположно вектору $\underline{a} \times \underline{b}$, значит, и при $\lambda < 0$ векторы $(\lambda \underline{a}) \times \underline{b}$ и $\lambda(\underline{a} \times \underline{b})$ имеют одинаковое направление). Следовательно, векторы $(\lambda \underline{a}) \times \underline{b}$ и $\lambda(\underline{a} \times \underline{b})$ равны. ■

Используя свойства 3° и 4°, докажите самостоятельно, что $\underline{a} \times (\lambda \underline{b}) = \lambda(\underline{a} \times \underline{b})$.

5°. $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$ (свойство распределительности относительно суммы векторов).

Доказательство. Если векторы $\underline{a}$ и $\underline{b}$ коллинеарны вектору $\underline{c}$ или хотя бы один из векторов $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ нулевой, то свойство очевидно. В остальных случаях введем для доказательства единичный вектор $\underline{c}_0$, одинаково направленный с вектором $\underline{c}$. Проведем через его начало O плоскость π , перпендикулярную $\underline{c}_0$, и рассмотрим треугольник OAB такой, что $\underline{OA} = \underline{a}$, $\underline{AB} = \underline{b}$ и $\underline{OB} = \underline{a} + \underline{b}$ (рис. 143). Спроектируем треугольник OAB на плоскость π , в результате получим треугольник OA_1B_1 (если точка A_1 лежит на прямой OB_1 , то треугольник OA_1B_1 вырождается в отрезок). Повернем треугольник OA_1B_1 вокруг $\underline{c}_0$ на 90° по часовой стрелке, если смотреть из конца $\underline{c}_0$, в результате получим треугольник OA_2B_2 . Обозначим через φ угол между векторами $\underline{c}_0$ и $\underline{a}$. Пусть для определенности $0 < \varphi < \pi/2$ (как на рис. 143). Остальные случаи угла φ рассматриваются аналогично.

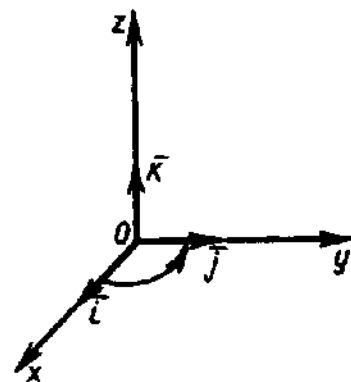


Рис. 144

Рассмотрим вектор $\underline{OA}_2$. Длина этого вектора $|\underline{OA}_2| = |\underline{OA}_1| = |\underline{a}| \cos(\pi/2 - \varphi) = |\underline{a}| |\underline{c}_0| \sin \varphi$, так как $|\underline{c}_0| = 1$. Кроме этого, $\underline{OA}_2 \perp \underline{c}_0$, $\underline{OA}_2 \perp \underline{a}$ и векторы $\underline{a}$, $\underline{c}_0$, $\underline{OA}_2$ образуют правую тройку. Следовательно, по определению векторного произведения

$$\underline{OA}_2 = \underline{a} \times \underline{c}_0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для каждого из векторов $\underline{OB}_2$ и $\underline{A_2B_2}$, получаем

$$\underline{OB}_2 = (\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c}_0, \underline{A_2B_2} = \underline{b} \times \underline{c}_0.$$

Но так как $\underline{OB}_2 = \underline{OA}_2 + \underline{A_2B_2}$, то

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c}_0 = \underline{a} \times \underline{c}_0 + \underline{b} \times \underline{c}_0. \quad (1)$$

Вектор $\underline{c}$ направлен так же, как $\underline{c}_0$. Поэтому $\underline{c} = |\underline{c}| \underline{c}_0$. Умножив обе части равенства (1) на число $|\underline{c}|$, получим $|\underline{c}| [(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c}_0] = |\underline{c}| (\underline{a} \times \underline{c}_0 + \underline{b} \times \underline{c}_0)$. Отсюда согласно свойству 4°

$(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$. Заменяя $\overline{c}$ на $\overline{c}_0$, окончательно имеем $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c}_0 = \overline{a} \times \overline{c}_0 + \overline{b} \times \overline{c}_0$. ■

З а м е ч а н и е 1. Доказанное свойство дает право при векторном умножении векторных многочленов выполнять действия почленно, а свойство 4⁰ — объединить числовые коэффициенты векторных сомножителей. Например,

$$\begin{aligned} (2\overline{a} + 3\overline{b}) \times (4\overline{c} + 5\overline{d}) &= (2\overline{a} + 3\overline{b}) \times 4\overline{c} + (2\overline{a} + 3\overline{b}) \times 5\overline{d} = \\ &= 2\overline{a} \times 4\overline{c} + 3\overline{b} \times 4\overline{c} + 2\overline{a} \times 5\overline{d} + 3\overline{b} \times 5\overline{d} = \\ &= 8(\overline{a} \times \overline{c}) + 12(\overline{b} \times \overline{c}) + 10(\overline{a} \times \overline{d}) + 15(\overline{b} \times \overline{d}). \end{aligned}$$

Следует, однако, помнить, что порядок сомножителей векторного произведения является существенным и при перестановке сомножителей знак векторного произведения нужно изменить.

Например, $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \times (\overline{2b} + \overline{3c}) = 2(\overline{a} \times \overline{b}) + 2(\overline{b} \times \overline{b}) + 2(\overline{c} \times \overline{b}) + 3(\overline{a} \times \overline{c}) + 3(\overline{b} \times \overline{c}) + 3(\overline{c} \times \overline{c}) = 2(\overline{a} \times \overline{b}) - 2(\overline{b} \times \overline{c}) + 3(\overline{a} \times \overline{c}) + 3(\overline{b} \times \overline{c}) = 2(\overline{a} \times \overline{b}) + (\overline{b} \times \overline{c}) + 3(\overline{a} \times \overline{c})$.

З а м е ч а н и е 2. Согласно определению и свойствам 1⁰ и 3⁰ векторного произведения для базисных векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (рис. 144) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \overline{i} \times \overline{i} &= 0; \overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}; \overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}; \\ \overline{j} \times \overline{i} &= -\overline{k}; \overline{j} \times \overline{j} = 0; \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}; \\ \overline{k} \times \overline{i} &= \overline{j}; \overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}; \overline{k} \times \overline{k} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Выражение векторного произведения через координаты векторов. Теорема 9.7. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами: $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то векторное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ определяется формулой

$$\overline{a} \times \overline{b} = \{(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1); (Z_1 X_2 - Z_2 X_1); (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\}.$$

Эту формулу с помощью определителей второго порядка* можно записать в виде

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \overline{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \overline{k}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$\overline{a} = X_1 \overline{i} + Y_1 \overline{j} + Z_1 \overline{k}, \quad \overline{b} = X_2 \overline{i} + Y_2 \overline{j} + Z_2 \overline{k}.$$

Используя замечание 1, получаем

$$\begin{aligned} \overline{a} \times \overline{b} &= X_1 X_2 (\overline{i} \times \overline{i}) + X_1 Y_2 (\overline{i} \times \overline{j}) + X_1 Z_2 (\overline{i} \times \overline{k}) + \\ &+ Y_1 X_2 (\overline{j} \times \overline{i}) + Y_1 Y_2 (\overline{j} \times \overline{j}) + Y_1 Z_2 (\overline{j} \times \overline{k}) + \\ &+ Z_1 X_2 (\overline{k} \times \overline{i}) + Z_1 Y_2 (\overline{k} \times \overline{j}) + Z_1 Z_2 (\overline{k} \times \overline{k}). \end{aligned}$$

Отсюда, на основании равенств (2), находим

* Определителем второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется число, равное

$a_1 b_2 - a_2 b_1$.

$$\overline{a} \times \overline{b} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \overline{i} + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \overline{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \overline{k} \quad \text{или}$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \overline{i} + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \overline{k}.$$

Получено разложение вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ по базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$; коэффициенты этого разложения представляют собой координаты вектора $\overline{a} \times \overline{b}$. Таким образом,

$$\overline{a} \times \overline{b} = \{X; Y; Z\}, \quad (3)$$

где $X = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; Y = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}; Z = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$. ■

Пример. Даны векторы $\overline{a} = \{2; 5; 7\}$ и $\overline{b} = \{1; 2; 4\}$. Найти координаты векторного произведения $\overline{a} \times \overline{b}$.

Решение. По формуле (3) находим

$$X = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; Y = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1; Z = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Итак, $\overline{a} \times \overline{b} = \{6; -1; -1\}$.

§ 8. Смешанное произведение трех векторов

1. Определение и геометрический смысл смешанного произведения.

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$, т. е.

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}).$$

Следующая теорема выражает геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 9.8. Смешанное произведение $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$ равно объему v параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — правая, со знаком «-», если тройка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — левая. Если же $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, то $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = 0$. Другими словами:

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{cases} v, & \text{если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ — правая тройка,} \\ -v, & \text{если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ — левая тройка,} \\ 0, & \text{если } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть даны некопланарные векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, образующие правую тройку. Обозначим через v объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, через s — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{b}$ и $\overline{c}$, а через h — высоту параллелепипеда (рис. 145). Тогда по определению скалярного и векторного произведений

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) &= |\overline{a}| |\overline{b} \times \overline{c}| \cos \theta = |\overline{a}| |\overline{b}| |\overline{c}| \sin \varphi \cos \theta = \\ &= |\overline{b}| |\overline{c}| \sin \varphi |\overline{a}| \cos \theta, \end{aligned}$$

где φ — угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а θ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b} \times \vec{c}$. Так как $|\vec{b}| |\vec{c}| \sin \varphi = s$, $|\vec{a}| \cos \theta = h$, то $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = sh = v$. Если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая, то $h = -|\vec{a}| \cos(\pi - \theta) = -|\vec{a}| \cos \theta$. Поэтому $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -sh = -v$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то, очевидно, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда либо $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ (если векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны), либо $(\vec{b} \times \vec{c}) \perp \vec{a}$ (если $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны). В любом случае $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$. ■

Итак, доказано, что если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$. Верно и обратное: если $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Действительно, если бы векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были некомпланарны, то по теореме 9.8 смешанное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \pm v \neq 0$, что противоречит условию.

Следствие. Из теоремы легко выводится следующее тождество

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad (1)$$

т. е. знаки $\cdot$ и $\times$ в смешанном произведении можно менять местами.

Действительно, согласно свойству 1° скалярного произведения

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (2)$$

Далее, по теореме 9.8 имеем

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \pm v, \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \pm v. \quad (3)$$

Так как тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ имеют одинаковую ориентацию, т. е. либо обе правые, либо обе левые, то, на основании теоремы 9.8 в правых частях равенств (3) нужно брать один и тот же знак. Таким образом, имеем

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

и на основании равенства (2)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

т. е. получено тождество (1).

В силу тождества (1) смешанные произведения $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ можно обозначить более простым символом $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

2. Выражение смешанного произведения через координаты векторов. Теорема 9.9. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами

$$\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}, \vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}, \vec{c} = \{X_3; Y_3; Z_3\},$$

то смешанное произведение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ определяется формулой

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = X_1 \begin{vmatrix} Y_2 & Z_2 \\ Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} + Y_1 \begin{vmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_3 & X_3 \end{vmatrix} + Z_1 \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix}.$$

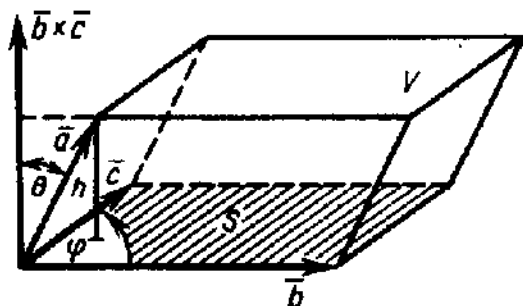


Рис. 145

Доказательство. Имеем: $\overline{a} \cdot \overline{b} \times \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$.
По теореме 9.7

$$\overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} Y_2 & Z_2 \\ Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_3 & X_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix}.$$

Умножая скалярно вектор $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ на вектор $\overline{b} \times \overline{c}$ и используя теорему 9.6, получаем

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \times \overline{c} = X_1 \begin{vmatrix} Y_2 & Z_2 \\ Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} + Y_1 \begin{vmatrix} Z_2 & X_2 \\ Z_3 & X_3 \end{vmatrix} + Z_1 \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Пример. В пространстве даны четыре точки: $A(1; 1; 1)$, $B(4; 4; 4)$, $C(3; 5; 5)$, $D(2; 4; 7)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

Решение. Как известно из элементарной геометрии, объем v_t тетраэдра $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$; отсюда и из теоремы 9.8 заключаем, что v_t равен $1/6$ абсолютной величины смешанного произведения $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$. Найдем это смешанное произведение. Прежде всего определим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. По теореме 9.2 имеем: $\overline{AB} = \{3; 3; 3\}$, $\overline{AC} = \{2; 4; 4\}$, $\overline{AD} = \{1; 3; 6\}$. Используя теорему 9.9, получаем

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 18.$$

Отсюда

$$v_t = (1/6) \cdot 18 = 3.$$

§ 9. Уравнения поверхности и линии

Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$, произвольная поверхность S (рис. 146) и уравнение

$$F(x; y; z) = 0. \quad (1)$$

Будем говорить, что уравнение (1) является уравнением поверхности S в заданной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y; z) \in S$, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

С точки зрения данного определения поверхность S есть множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1).

Пример. В прямоугольной системе координат уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

определяет поверхность, являющуюся сферой радиуса R с центром в точке $O(0; 0; 0)$ (рис. 147).

В самом деле, если $M(x; y; z)$ — произвольная точка, то по формуле (7) (см. § 2, п. 5)

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Следовательно, заданному уравнению удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые удалены от точки O на расстоя-

ние R . Таким образом, множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, есть сфера с центром в начале координат и радиусом R .

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей, т. е. как множество точек, находящихся одновременно на двух поверхностях, и соответственно этому определять линию заданием двух уравнений. Таким образом, два уравнения

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

называются *уравнениями линии* L , если им удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на L , и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на линии L .

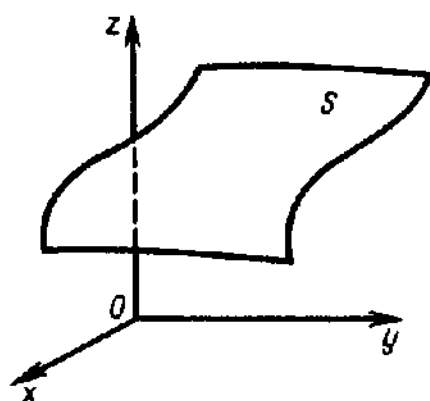


Рис. 146

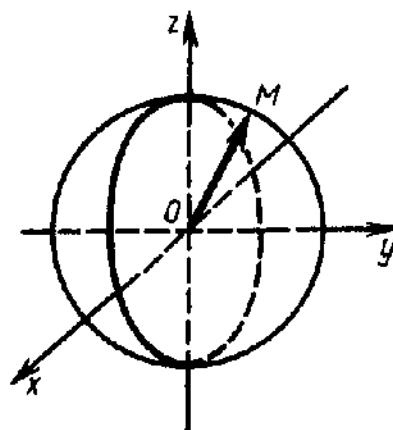


Рис. 147

Например, уравнения двух сфер

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 10, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

совместно определяют лежащую в плоскости Oxy окружность, радиус которой равен единице с центром в начале координат.

§ 10. Уравнение цилиндрической поверхности

Пусть в плоскости Oxy лежит некоторая линия L (рис. 148). Проведем через каждую точку линии L прямую, параллельную оси Oz . Множество этих прямых образует некоторую поверхность S , которая называется *цилиндрической*. Указанные прямые называются *образующими* поверхности S , а линия L — ее *направляющей*.

Аналогично определяется цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными осям Ox и Oy .

Для определенности будем рассматривать цилиндрическую поверхность S с образующими, параллельными оси Oz , и докажем, что она определяется уравнением вида

$$F(x; y) = 0. \quad (1)$$

Действительно, пусть (1) — уравнение направляющей L . Возьмем на S любую точку $M(x; y; z)$. Эта точка лежит на какой-то образующей. Если M_0 — пересечение этой образующей с плоскостью Oxy , то точка $M_0 \in L$ и ее координаты x и y удовлетворяют уравнению (1). Но тогда числа x, y, z также удовлетворяют этому уравнению, поскольку $F(x; y)$ от z не зависит. Итак, координаты x, y, z произвольной точки $M \in S$ удовлетворяют уравнению (1). Очевидно, если $M(x; y; z) \notin S$, то $M_0(x; y) \notin L$, т. е. координаты x и y не удовлетворяют уравнению (1). Это доказывает, что (1) является уравнением поверхности S .

Таким образом, уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz , не содержит координаты z и совпадает с уравнением направляющей. Например, если направляющей является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется *эллиптическим цилиндром*, а (2) — ее уравнением.

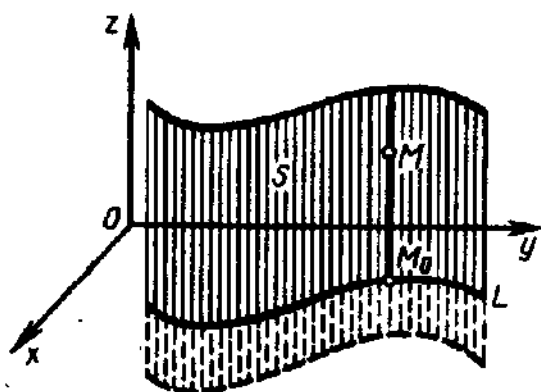


Рис. 148

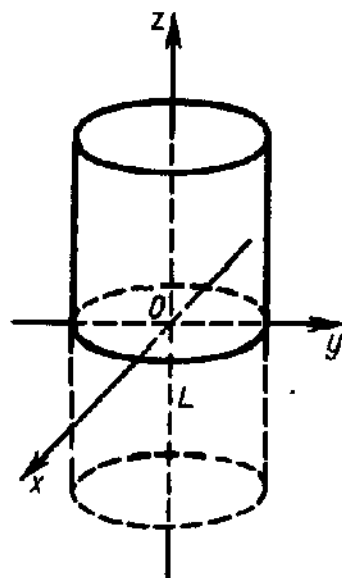


Рис. 149

Заметим, что на плоскости Oxy уравнение $F(x; y) = 0$ определяет линию L , но эта же линия в пространственной системе координат $Oxyz$ задается двумя уравнениями

$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Так, например, в пространственной системе координат $Oxyz$ уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ определяет цилиндрическую поверхность — *круговой цилиндр* (рис. 149), а направляющая L этого цилиндра (окружность), лежащая в плоскости Oxy , определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

§ 11. Уравнения плоскости

Покажем, что поверхности первого порядка плоскости и только плоскости, и рассмотрим два вида уравнений плоскости.

1. Общее уравнение плоскости. Пусть заданы: прямоугольная система координат $Oxyz$, произвольная плоскость π ; точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi$; вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$, перпендикулярный плоскости π , где A, B, C — его координаты (рис. 150).

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z)$. Точка M лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\vec{M_0M}$ и $\vec{N}$ взаимно перпендикулярны. Так как координаты вектора $\vec{M_0M}$ равны $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, то в силу условия перпендикулярности двух векторов [см. § 6, формулу (3)] получаем, что точка $M(x; y; z)$ лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Это и есть искомое уравнение плоскости π , так как ему удовлетворяют координаты x, y, z любой точки M , лежащей на плоскости π , и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой плоскости.

Раскрывая скобки, приведем уравнение (1) к виду

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Далее, обозначая число $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D , получаем

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *общим уравнением плоскости*. Таким образом, плоскость является поверхностью первого порядка, так как определяется уравнением первой степени.

Верно и обратное: всякое уравнение первой степени вида (2) определяет в заданной прямоугольной системе координат плоскость.

Действительно, пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ с произвольными коэффициентами A, B, C и D , причем из коэффициентов A, B и C хотя бы один отличен от нуля. Данное уравнение заведомо имеет хотя бы одно решение x_0, y_0, z_0 (если, например, $C \neq 0$, то, взяв произвольные x_0 и y_0 , из уравнения получим: $z_0 = -\frac{A}{C}x_0 - \frac{B}{C}y_0 - \frac{D}{C}$).

Таким образом, существует хотя бы одна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению, т. е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычитая это числовое равенство из уравнения

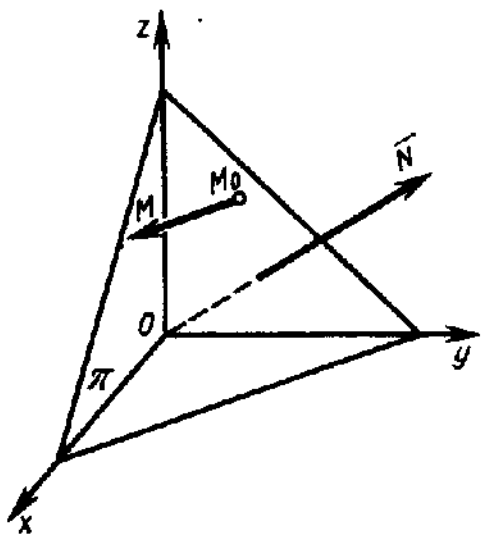


Рис. 150

$Ax + By + Cz + D = 0$, получаем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

эквивалентное данному. Полученное уравнение (а стало быть, и уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$) совпадает с уравнением (1) и, значит, определяет плоскость π , проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$, перпендикулярный плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 1; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{2; 2; 3\}$.

Решение. По формуле (1) искомое уравнение таково:

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0 \text{ или } 2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 9.10. Если два уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют одну и ту же плоскость, то их коэффициенты пропорциональны.

Доказательство. Действительно, векторы $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ перпендикулярны этой плоскости и, следовательно, коллинеарны. Но тогда числа $A_1; B_1; C_1$ пропорциональны числам $A_2; B_2; C_2$ (см. формулу (2), § 4), т. е.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \mu,$$

или $A_2 = \mu A_1$, $B_2 = \mu B_1$, $C_2 = \mu C_1$ (μ — множитель пропорциональности). Умножая первое из заданных уравнений на μ и вычитая из второго, получаем $D_2 - \mu D_1 = 0$, т. е. $D_2 = \mu D_1$, и, следовательно,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu. \blacksquare$$

2. Угол между двумя плоскостями. Рассмотрим две плоскости π_1 и π_2 , заданные соответственно уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

При любом расположении плоскостей π_1 и π_2 в пространстве один из углов φ между ними равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ и вычисляется по следующей формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3)$$

Второй угол равен $180^\circ - \varphi$.

3. Условие параллельности плоскостей. Если плоскости π_1 и π_2 параллельны, то коллинеарны их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, и наоборот. Но тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4)$$

Условие (4) является условием параллельности плоскостей π_1 и π_2 .

4. Условие перпендикулярности плоскостей. Если плоскости π_1 и π_2 взаимно перпендикулярны, то их нормальные векторы $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ также перпендикулярны друг другу ($\varphi = \pi/2$), и наоборот. Поэтому из формулы (3) непосредственно получаем условие перпендикулярности плоскостей π_1 и π_2 :

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная плоскость π (рис. 151). Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную плоскости π . Будем называть ее *нормалью*. Обозначим через P точку, в которой нормаль пересекает плоскость π . На нормали введем направление от точки O к точке P . Если точки O и P совпадают, то возьмем любое из двух направлений на нормали. Пусть α, β, γ — углы, которые составляет направленный нормаль с осями координат; p — длина отрезка OP .

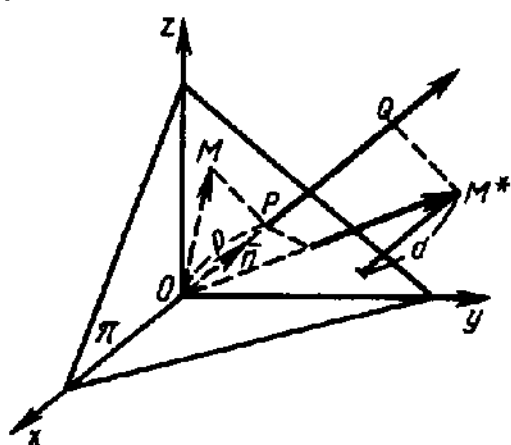


Рис. 151

Выведем уравнение данной плоскости π , считая известными числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ и p . Для этого введем единичный вектор $\overline{n}$ на нормали, направление которого совпадает с положительным направлением нормали.

Так как $\overline{n}$ — единичный вектор, то

$$\overline{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}. \quad (5)$$

Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка. Она лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда проекция вектора $\overline{OM}$ на нормаль равна p , т. е.

$$\text{пр}_{\overline{n}} \overline{OM} = p. \quad (6)$$

Заметим теперь, что $\text{пр}_{\overline{n}} \overline{OM} = \overline{n} \cdot \overline{OM}$ и $\overline{OM} = \{x; y; z\}$. По теореме 9.6, учитывая равенство (5), имеем

$$\text{пр}_{\overline{n}} \overline{OM} = \overline{n} \cdot \overline{OM} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) получаем, что точка $M(x; y; z)$ лежит на плоскости π тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (8)$$

которое и является искомым уравнением данной плоскости. Уравнение плоскости в виде (8) называется *нормальным*.

Теорема 9.11. Если точка M^* имеет координаты x^*, y^*, z^* , а плоскость задана нормальным уравнением

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

то расстояние d от точки M^* до этой плоскости определяется по формуле

$$d = |x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p|.$$

Доказательство. Пусть Q — проекция точки M^* на направленную нормаль (рис. 151); тогда в силу основного тождества (см. гл. 1, § 3) $PQ = OQ - OP$, откуда

$$d = |PQ| = |OQ - OP|.$$

Но $OQ = \text{пр}_{\vec{n}} \overline{OM^*}$, $OP = p$, следовательно,

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overline{OM^*} - p|. \quad (9)$$

Вектор $\overline{OM^*} = \{x^*; y^*; z^*\}$, а $\text{пр}_{\vec{n}} \overline{OM^*} = \vec{n} \cdot \overline{OM^*}$. По теореме 9.5, учитывая равенство (5), найдем

$$\text{пр}_{\vec{n}} \overline{OM^*} = \vec{n} \cdot \overline{OM^*} = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma. \quad (10)$$

Из равенств (9) и (10) окончательно получаем

$$d = |x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p|. \blacksquare$$

Покажем теперь, как привести общее уравнение плоскости к нормальному виду. Пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (11)$$

— общее уравнение некоторой плоскости, а

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (12)$$

— ее нормальное уравнение. Так как уравнения (11) и (12) определяют одну и ту же плоскость, то по теореме 9.10 коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это означает, что умножая все члены (11) на некоторый множитель μ , получаем уравнение

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0,$$

совпадающее с уравнением (12), т. е. имеем

$$\mu A = \cos \alpha, \mu B = \cos \beta, \mu C = \cos \gamma, \mu D = -p. \quad (13)$$

Чтобы найти множитель μ , возведем первые три из равенств (13) в квадрат и сложим; тогда получим

$$\mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Но согласно формуле (6) из § 2 правая часть последнего равенства равна единице. Следовательно,

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Число μ , с помощью которого общее уравнение плоскости преобразуется в нормальное, называется *нормирующим множителем* этого уравнения. Знак μ определяется равенством $\mu D = -\rho$, т. е. μ имеет знак, противоположный знаку свободного члена общего уравнения (11).

Если в уравнении (11) $D=0$, то знак нормирующего множителя выбирается произвольно.

Пример. Даны плоскость $x + 2y + 2z - 8 = 0$ и точка $M^*(1; 1; 1)$. Найти расстояние d от точки M^* до данной плоскости.

Решение. Чтобы использовать теорему 9.11, надо прежде всего привести данное уравнение к нормальному виду. Для этого найдем нормирующий множитель

$$\mu = 1/\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 1/3.$$

Умножая данное уравнение на μ , получаем искомое нормальное уравнение плоскости

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{8}{3} = 0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M^* , имеем

$$d = |1/3 + 2/3 + 2/3 - 8/3| = |-3/3| = 1.$$

§ 12. Уравнения прямой

Как уже было отмечено, линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей и определять заданием двух уравнений. В частности, каждую прямую линию можно рассматривать как пересечение двух плоскостей и соответственно этому определять заданием двух уравнений первой степени.

Пусть заданы некоторая прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная прямая L . Обозначим через π_1 и π_2 две различные плоскости, пересекающиеся по прямой L , заданные соответственно уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (1)$$

Два уравнения вида (1) совместно определяют прямую L в том и только в том случае, когда плоскости π_1 и π_2 не параллельны и не совпадают друг с другом, т. е. нормальные векторы этих плоскостей $\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ не коллинеарны (коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2).

Уравнения (1) называются *общими уравнениями прямой*.

1. Канонические уравнения прямой. Для решения задач уравнения (1) не всегда удобны, поэтому используют специальный вид уравнений прямой.

Пусть дана какая-нибудь прямая L и ненулевой вектор $\overline{a}$, лежащий на данной прямой или параллельный ей (рис. 152). Вектор $\overline{a}$ называется *направляющим вектором* данной прямой. Выведем урав-

нения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$ (рис. 152).

Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка. Она лежит на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{a} = \{l; m; n\}$, т. е. когда координаты вектора $\overline{M_0M}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{a}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (2)$$

Уравнения (2) и являются искомыми. Они называются *каноническими уравнениями прямой*.

Для того чтобы составить канонические уравнения (2), если прямая L задана уравнениями (1), необходимо:

1) найти какую-нибудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$; для этого следует задать числовое значение одной из неизвестных координат x_0, y_0, z_0 и подставить его вместо соответствующей переменной в уравнения (1), после этого две другие координаты определяются в результате совместного решения уравнений (1);

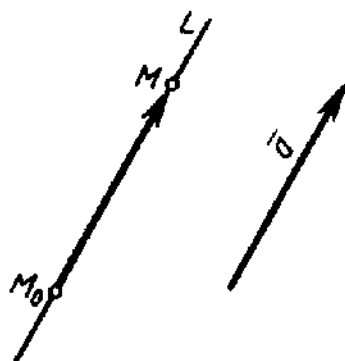


Рис. 152

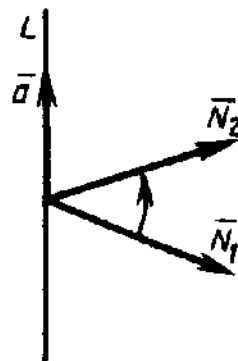


Рис. 153

2) найти направляющий вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$. Так как прямая L определена пересечением плоскостей π_1 и π_2 , то она перпендикулярна каждому из нормальных векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (рис. 153). Поэтому в качестве вектора $\vec{a}$ можно взять любой вектор, перпендикулярный векторам $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, например их векторное произведение $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Так как координаты векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ известны: $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$, то по теореме 9.7 найдем координаты вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} = \{l; m; n\}.$$

Пример 1. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Полагая, например, $x_0 = 1$, из системы

$$\begin{cases} 2y_0 + 4z_0 - 8 = 0, \\ y_0 - 3z_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

получаем $y_0=2$, $z_0=1$. Таким образом, точка $M_0(1; 2; 1)$ прямой найдена. Теперь определим направляющий вектор $\overline{a}$. Имеем: $\overline{N}_1 = \{3; 2; 4\}$, $\overline{N}_2 = \{2; 1; -3\}$, отсюда $\overline{a} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \{-10; 17; -1\}$, т. е. $l=-10$, $m=17$, $n=-1$. Подставляя найденные значения x_0 , y_0 , z_0 и l , m , n в равенства (2), получаем канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}.$$

2. Параметрические уравнения прямой. Иногда прямую полезно задавать не в виде канонических уравнений (2), а иначе. Пусть прямая L задана уравнениями (2). Обозначим через t каждое из равных отношений. Тогда

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t,$$

откуда

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt. \quad (3)$$

Равенства (3) называются *параметрическими уравнениями прямой L* , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\overline{a} = \{l; m; n\}$. В уравнениях (3) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр ($-\infty < t < +\infty$); x , y , z — как функции от t . При изменении t величины x , y , z изменяются, так что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой.

Параметрические уравнения удобны в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью. В самом деле, пусть непараллельная плоскость π и прямая L заданы соответственно уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ и } x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt.$$

Для определения точки пересечения прямой и плоскости подставим выражения для x , y , z из уравнений L в уравнение π . В результате преобразований получаем

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn},$$

причем знаменатель дроби не равен нулю, так как плоскость не параллельна прямой (см. § 13). Подставляя найденное значение t в уравнения прямой, находим искомую точку $M(x; y; z)$ пересечения прямой L с плоскостью π .

3. Угол между прямыми. Рассмотрим две прямые L_1 и L_2 , заданные соответственно уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

При любом расположении прямых L_1 и L_2 в пространстве один из двух углов между ними равен углу φ между их направляющими векторами $\overline{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ и $\overline{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$, а второй угол равен

$180^\circ - \varphi$. Угол φ вычисляется по следующей формуле:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

4. Условие параллельности прямых. Прямые L_1 и L_2 параллельны в том и только в том случае, когда их направляющие векторы $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ и $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ коллинеарны. Отсюда получаем условие параллельности прямых L_1 и L_2 :

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

5. Условие перпендикулярности прямых. Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны в том и только в том случае, когда их направляющие векторы $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ и $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ перпендикулярны. Отсюда получаем условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

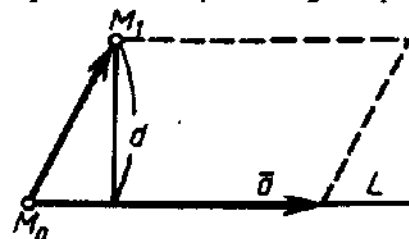


Рис. 154

6. Расстояние от точки до прямой. В заключение рассмотрим задачу: найти расстояние d от данной точки до данной прямой в пространстве.

Пусть дана прямая $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Искомое расстояние d является высотой параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и $\vec{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ (рис. 154).

Пусть вектор $\vec{p}$ — векторное произведение векторов $\vec{M_0M_1}$ и $\vec{a}$: $\vec{p} = \vec{M_0M_1} \times \vec{a}$. Так как $|\vec{p}|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{M_0M_1}$ и $\vec{a}$, то $d = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{a}|}$, где

$$|\vec{p}| = \sqrt{\left| \frac{y_1 - y_0}{m} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_0}{n} \frac{x_1 - x_0}{l} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{y_1 - y_0}{m} \right|^2},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{\sqrt{\left| \frac{y_1 - y_0}{m} \frac{z_1 - z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_0}{n} \frac{x_1 - x_0}{l} \right|^2 + \left| \frac{x_1 - x_0}{l} \frac{y_1 - y_0}{m} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

§ 13. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Условия параллельности и перпендикулярности. Пусть заданы прямая

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Прямая параллельна плоскости в том и только в том случае, когда ее направляющий вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$ перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$ плоскости. Отсюда получаем условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Прямая перпендикулярна плоскости в том и только в том случае, когда ее направляющий вектор коллинеарен нормальному вектору плоскости. Отсюда получаем условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

2. Угол между прямой и плоскостью. Пусть заданы плоскость π :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая L :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

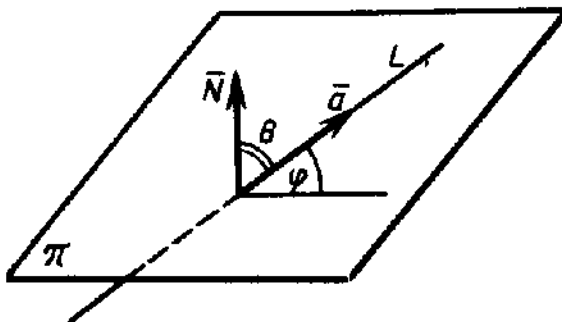


Рис. 155

не перпендикулярная плоскости. Под углом φ между прямой L и плоскостью π будем понимать острый угол между L и ее проекцией на π (рис. 155). Обозначим через θ угол между векторами $\vec{N} = \{A; B; C\}$ и $\vec{a} = \{l; m; n\}$. Если $\theta \leq 90^\circ$ (как на рис. 155), то $\varphi = 90^\circ - \theta$ и $\sin \varphi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$. Если же $\theta > 90^\circ$, то $\varphi = \theta - 90^\circ$ и $\sin \varphi = \sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta$. В любом случае $\sin \varphi = |\cos \theta|$. Но для $\cos \theta$ формула известна [см. § 6, формулу (4)], следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

§ 14. Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка — это поверхности, которые в прямоугольной системе координат определяются алгебраическими уравнениями второй степени.

Геометрическое исследование поверхностей второго порядка проведем по заданным уравнениям с помощью метода параллельных сечений.

1. Эллипсоид. Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением эллипсоида*.

Установим геометрический вид эллипсоида. Для этого рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy . Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z=h$, где h — любое число, а линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \quad (2)$$

Исследуем уравнения (2) при различных значениях h .

1) Если $|h| > c$ ($c > 0$), то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$ и уравнения (2) определяют мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости $z=h$ с данным эллипсоидом не существует.

2) Если $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ и линия (2) вырождается в точки $(0; 0; +c)$ и $(0; 0; -c)$ (плоскости $z = \pm c$ касаются эллипсоида).

3) Если $|h| < c$, то уравнения (2) можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

откуда следует, что плоскость $z=h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a^* = a\sqrt{1 - h^2/c^2}$ и $b^* = b\sqrt{1 - h^2/c^2}$. При уменьшении $|h|$ значения a^* и b^* увеличиваются и достигают своих наибольших значений при $h=0$, т. е. в сечении эллипсоида координатной плоскостью Oxy получается самый большой эллипс с полуосями $a^* = a$ и $b^* = b$.

Аналогичная картина получается и при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz .

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллипсоид как замкнутую овальную поверхность (рис. 156). Величины a , b , c называются *полуосями* эллипсоида. В случае $a=b=c$ эллипсоид является сферой.

2. Однополостный гиперболоид. *Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

Установим вид поверхности (3). Для этого рассмотрим сечения ее координатными плоскостями Oxz ($y=0$) и Oyz ($x=0$). Полу-

чаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперboloида плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy . Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (4)$$

из которых следует, что плоскость $z=h$ пересекает гиперboloид по эллипсу с полуосями $a^* = a\sqrt{1+h^2/c^2}$ и $b^* = b\sqrt{1+h^2/c^2}$, достигающими своих наименьших значений при $h=0$, т. е. в сечении данного гиперboloида координатной плоскостью Oxy получается самый маленький эллипс с полуосями $a^*=a$ и $b^*=b$. При бесконечном возрастании $|h|$ величины a^* и b^* возрастают бесконечно.

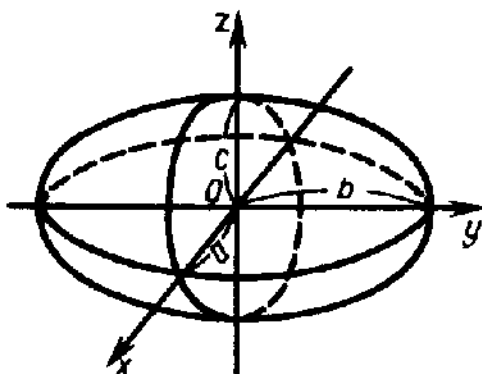


Рис. 156

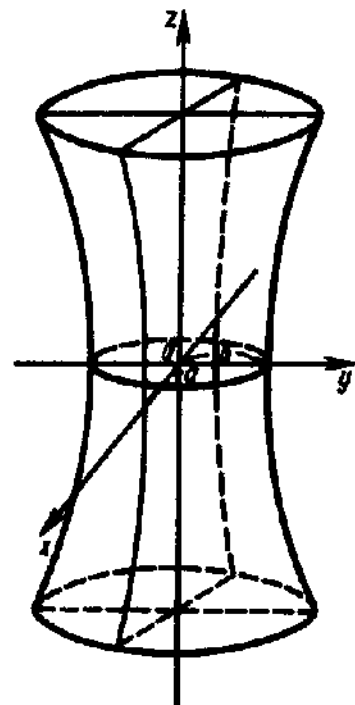


Рис. 157

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить однополостный гиперboloид в виде бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся по мере удаления (по обе стороны) от плоскости Oxy (рис. 157).

Величины a , b , c называются *полуосями* однополостного гиперboloида, первые две из них изображены на рис. 157, а чтобы изобразить на чертеже полуось c , следует построить основной прямоугольник какой-нибудь из гипербол.

3. Двуполостный гиперboloид. Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется *каноническим уравнением двуполостного гиперboloида*.

Установим геометрический вид поверхности (5). Для этого рассмотрим ее сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz . Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперboloида плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy . Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (6)$$

из которых следует, что при $|h| > c$ ($c > 0$) плоскость $z=h$ пересекает гиперboloид по эллипсу с полуосями $a^* = a\sqrt{h^2/c^2 - 1}$ и $b^* = b\sqrt{h^2/c^2 - 1}$. При увеличении $|h|$ величины a^* и b^* также увеличиваются.

При $h = \pm c$ уравнениям (6) удовлетворяют координаты только двух точек: $(0; 0; +c)$ и $(0; 0; -c)$ (плоскости $z = \pm c$ касаются данной поверхности).

При $|h| < c$ уравнения (6) определяют мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости $z=h$ с данным гиперboloидом не существует.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить двуполостный гиперboloид как поверхность, состоящую из двух отдельных «полостей» (отсюда название двуполостный), каждая из которых имеет вид бесконечной выпуклой чаши (рис. 158).

Величины a, b, c называются *полуосями* двуполостного гиперboloида. На рис. 158 изображена величина c . Чтобы изобразить на чертеже a и b , нужно построить основные прямоугольники гипербол в плоскостях Oxz и Oyz .

4. Эллиптический параболоид. *Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (7)$$

где $p > 0, q > 0$.

Уравнение (7) называется *каноническим уравнением эллиптического параболоида*.

Исследуем с помощью сечений эту поверхность. Рассмотрим сначала сечения данной поверхности координатными плоскостями Oxz и Oyz . Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются параболы, симметричные относительно оси Oz , с вершинами в начале координат.

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями $z=h$, параллельными координатной плоскости Oxy . Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (8)$$

из которых следует, что при $h > 0$ плоскость $z=h$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу с полуосями $a^* = \sqrt{2hp}$ и $b^* =$

$= \sqrt{2hq}$. При увеличении h величины a^* и b^* также увеличиваются; при $h=0$ эллипс вырождается в точку (плоскость $z=0$ касается данного параболоида). При $h < 0$ уравнения (8) определяют мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости $z=h$ с данным параболоидом не существует.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллиптический параболоид в виде бесконечной выпуклой чаши (рис. 159).

Точка $(0; 0; 0)$ называется *вершиной* эллиптического параболоида; числа p и q — его *параметрами*.

В случае $p=q$ уравнения (8) определяют окружность с центром на оси Oz , т. е. эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси. Такая поверхность называется *параболоидом вращения*.

5. Гиперболический параболоид. *Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (9)$$

где $p > 0, q > 0$.

Уравнение (9) называется *каноническим уравнением гиперболического параболоида*.

Установим геометрический вид поверхности (9). Рассмотрим сечение параболоида координатной плоскостью Oxz ($y=0$). Получаем уравнения

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \quad (10)$$

из которых следует, что в сечении получается парабола, направленная вверх, симметричная относительно оси Oz , с вершиной в начале координат. В сечениях поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxz ($y=h$), получаются также направленные вверх параболы

$$\begin{cases} x^2 = 2p \left(z + \frac{h^2}{2q} \right), \\ y = h. \end{cases}$$

Рассмотрим сечение данного параболоида плоскостью Oyz ($x=0$). Получаем уравнения

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что и в этом случае в сечении получается парабола, но теперь направленная вниз, симметричная относительно оси Oz , с вершиной в начале координат. Рассмотрев сечения параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oyz ($x=h$), получим уравнения

$$\begin{cases} y^2 = -2q \left(z - \frac{h^2}{2p} \right), \\ x = h, \end{cases}$$

из которых следует, что при любом h в сечении получается парабола, направленная вниз, а вершина ее лежит на параболе, определенной уравнениями (10).

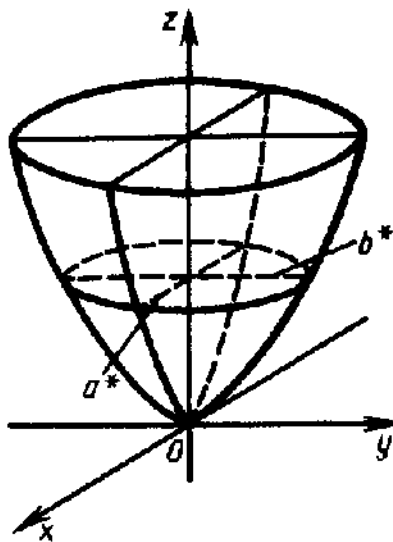


Рис. 159

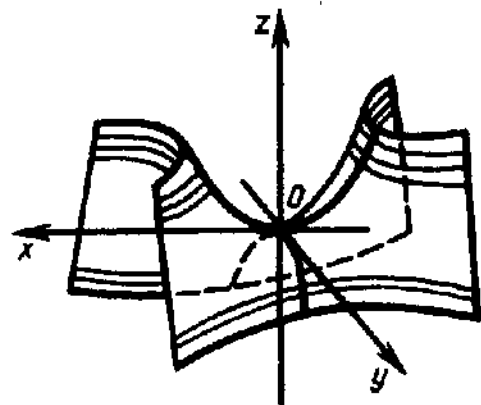


Рис. 160

Рассмотрим, наконец, сечения параболоида плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy . Получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

из которых следует, что при $h > 0$ в сечении получаются гиперболы, пересекающие плоскость Oxz ; при $h < 0$ — гиперболы, пересекаю-

щие плоскость Oyz ; при $h=0$ гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить гиперболический параболоид в виде седлообразной поверхности (рис. 160). На рисунке изображено несколько сечений параболоида плоскостями $z=h$ для случаев $h>0$ и $h<0$.

Точка $(0; 0; 0)$ называется *вершиной* гиперболического параболоида; числа p и q — его *параметрами*.

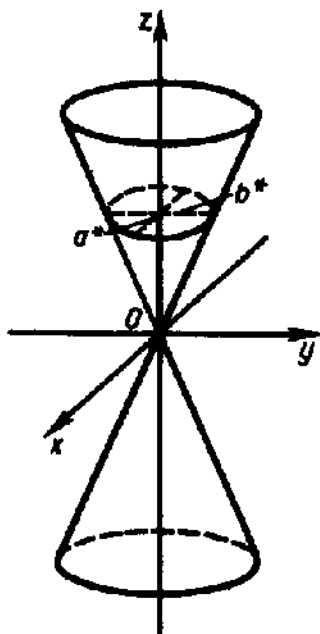


Рис. 161

6. Конус второго порядка. Конусом второго порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется *каноническим уравнением конуса второго порядка*.

Рассмотрим геометрические свойства конуса. В сечение этой поверхности плоскостью Oxz ($y=0$) получаем линию

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

распадающуюся на две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Аналогично, в сечении конуса плоскостью Oyz ($x=0$) также получаются две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь сечения данной поверхности плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy . Получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

из которых следует, что при $h > 0$ и $h < 0$ в сечениях получаются эллипсы с полуосями $a^* = \frac{a|h|}{c}$, $b^* = \frac{b|h|}{c}$. При увеличении абсолютной величины h полуоси a^* и b^* также увеличиваются.

При $h = 0$ линия пересечения поверхности с плоскостью $z = h$ вырождается в точку $(0; 0; 0)$.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют представить конус в виде поверхности, изображенной на рис. 161.

ГЛАВА 10

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Матрицы

1. Определение матрицы. Пусть даны прямоугольная система координат $Oxyz$ и точка M с координатами x_1, x_2, x_3^* . Рассмотрим радиус-вектор** $\overline{r}$ точки M : $\overline{r} = \overline{OM}$. Обозначим через $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ единичные базисные векторы; тогда вектор $\overline{r}$ в данной системе координат запишется так:

$$\overline{r} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + x_3 \overline{e}_3.$$

Преобразуем данную систему координат поворотом ее вокруг начала координат O и будем считать известными углы, которые образует каждая ось новой системы координат $Ox'y'z'$ с каждой осью старой. Обозначим через x'_1, x'_2, x'_3 координаты точки M в новой системе координат, а через $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ единичные базисные векторы новых осей. Тогда вектор $\overline{r}$ в новой системе координат запишется в виде

$$\overline{r} = x'_1 \overline{e}'_1 + x'_2 \overline{e}'_2 + x'_3 \overline{e}'_3.$$

Приравнивая выражения для вектора $\overline{r}$, получаем векторное равенство

$$x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + x_3 \overline{e}_3 = x'_1 \overline{e}'_1 + x'_2 \overline{e}'_2 + x'_3 \overline{e}'_3. \quad (1)$$

Рассмотрим преобразование координат точки M при повороте системы координат.

Разложим векторы $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ по старому базису:

$$\begin{cases} \overline{e}'_1 = a_{11} \overline{e}_1 + a_{21} \overline{e}_2 + a_{31} \overline{e}_3, \\ \overline{e}'_2 = a_{12} \overline{e}_1 + a_{22} \overline{e}_2 + a_{32} \overline{e}_3, \\ \overline{e}'_3 = a_{13} \overline{e}_1 + a_{23} \overline{e}_2 + a_{33} \overline{e}_3. \end{cases} \quad (2)$$

* В этом параграфе координаты точки M обозначаются через x_1, x_2, x_3 (вместо x, y, z).

** Радиусом-вектором точки M называется вектор, идущий из начала координат в эту точку.

Каждый из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ является единичным, поэтому для каждого из них коэффициентами разложения служат направляющие косинусы, т. е.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1), \quad a_{12} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2), \quad a_{13} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_3), \\ a_{21} &= \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_1), \quad a_{22} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_2), \quad a_{23} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3), \\ a_{31} &= \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1), \quad a_{32} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_2), \quad a_{33} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Заменяя в равенстве (1) векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ их разложениями (2) и группируя подобные члены, получаем

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3) \vec{e}_1 + \\ + (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3) \vec{e}_2 + (a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3) \vec{e}_3.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, находим

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3. \end{cases} \quad (3)$$

Следовательно, координаты x_1, x_2, x_3 представляют собой линейные комбинации координат x'_1, x'_2, x'_3 , полностью определяемые совокупностью коэффициентов $a_{11}, \dots, a_{33}$. Таким образом, мы пришли к понятию матрицы.

Определение. Таблица, составленная из коэффициентов (3), записанная в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

называется матрицей данного преобразования. Коротко матрицу обозначают так:

$$A = (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3);$$

где a_{ij} — элементы данной матрицы.

Элементы матрицы образуют *столбцы* и *строки*. Первый индекс (i) указывает номер строки, а второй (j) — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} . Матрица (4) имеет три строки и три столбца.

В высшей алгебре рассматриваются матрицы с любым числом строк и столбцов. Поэтому в общем виде матрица записывается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если в матрице число строк равно числу столбцов ($m=n$), то матрица называется *квадратной n -го порядка*, а в противном случае — *прямоугольной*. Так, матрица (4) квадратная, третьего порядка. В матрице (5) m строк и n столбцов. Если $m=1$, $n>1$, то получаем однострочечную матрицу $(a_1 a_2 \dots a_n)$, которая называется *вектор-строкой*. Если же $m>1$, а $n=1$, то получаем одностолбцовую матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

которая называется *вектор-столбцом*.

Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ равны, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах, т. е. если $a_{ij}=b_{ij}$ при всех i и j (при этом число строк (и аналогично столбцов) матриц A и B должно быть одинаковым).

2. Свойства матриц. Матрицы подобно векторам можно складывать, умножать на число и друг на друга. Рассмотрим эти операции.

1°. *Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой определяются равенством*

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначение: $A + B = C$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется разность двух матриц.

2°. *Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ :*

$$\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Пример 2.

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3°. *Произведением матрицы $A=(a_{ij})$, имеющей m строк и k столбцов, на матрицу $B=(b_{ij})$, имеющую k строк и n столбцов, называется матрица $C=(c_{ij})$, имеющая m строк и n столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B , т. е.*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

При этом число k столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B . В противном случае произведение не определено. Произведение обозначается так: $A \cdot B = C$.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA,$$

т. е. умножение матриц не обладает перестановочным свойством.

З а м е ч а н и е. Правило умножения легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент c_{ij} матрицы C , стоящей на пересечении i -й строки и j -го столбца, есть скалярное произведение i -й вектор-строки матрицы A и j -го вектор-столбца матрицы B .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для суммы и произведения матриц справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C, \\ C \cdot (A + B) &= C \cdot A + C \cdot B, \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, \\ (A + B) + C &= A + (B + C). \end{aligned}$$

4°. Умножение на единичную матрицу. Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется *главной диагональю* матрицы. Матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю, называется *единичной матрицей* и обозначается буквой E .

Так, единичной матрицей третьего порядка является матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Единичная матрица обладает замечательным свойством, а именно: *умножение квадратной матрицы любого порядка на соответствующую единичную матрицу не меняет матрицу*. Это свойство и объясняет ее название «единичная»: при умножении матриц она обладает таким же свойством, как число 1 при умножении чисел.

Пример 5. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; тогда согласно правилу умножения матриц имеем

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

откуда

$$A \cdot E = A \text{ и } E \cdot A = A.$$

Заметим, что единичной матрице (6) соответствует следующее преобразование координат точки:

$$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3.$$

Такое преобразование называется *тождественным*.

С понятием матрицы тесно связано понятие определителя.

§ 2. Определители

1. Определение определителя. Пусть дана квадратная матрица третьего порядка, элементы которой для удобства обозначим через $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Определение. *Определителем * третьего порядка, соответствующим матрице (1), называется число, обозначаемое символом*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

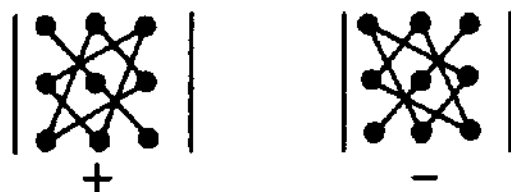
$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3. \quad (2)$$

Числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ называются *элементами определителя*. Диагональ, образованная элементами a_1, b_2, c_3 , называется *главной*, а диагональ, образованная элементами a_3, b_2, c_1 , — *побочной*.

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком «+», а какие со знаком «—», полезно

* Определители называются также детерминантами.

использовать следующее правило треугольников:



Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель. Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 1 - \\ - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -12.$$

2. Свойства определителей. Сформулируем и докажем эти свойства для определителей третьего порядка, хотя они присущи и определителям любого порядка.

1°. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства свойства достаточно применить к определителям, стоящим в левой и правой частях равенства, формулу (2) и убедиться в равенстве полученных выражений.

Свойство 1° устанавливает равноправность строк и столбцов определителя. Поэтому все дальнейшие свойства определителя будем формулировать и для строк, и для столбцов, а доказывать только для строк или только для столбцов.

2°. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на -1 . Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Это свойство доказывается аналогично предыдущему.

3°. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

В самом деле, при перестановке двух одинаковых столбцов определитель Δ не изменится, а согласно свойству 2 его знак изменится. Следовательно, $\Delta = -\Delta$, т. е. $2\Delta = 0$, или $\Delta = 0$. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

4°. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число λ равносильно умножению определителя на это число λ . Например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что по формуле (2) определитель выражается в виде суммы, каждый член которой содержит множителем один элемент из каждой строки и из каждого столбца.

5°. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Это свойство вытекает из предыдущего свойства (при $\lambda=0$).

6°. Если элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Действительно, если элементы двух столбцов определителя пропорциональны, то согласно свойству 4° общий множитель элементов этих столбцов можно вынести за знак определителя, в результате остается определитель с двумя одинаковыми столбцами, равный нулю согласно свойству 3°. Например,

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}.$$

7°. Если каждый элемент n -го столбца (n -й строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n -м столбце (n -й строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой — вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} a'_1 + a''_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 + a''_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 + a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_1 & b_1 & c_1 \\ a''_2 & b_2 & c_2 \\ a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно применить к определителям, стоящим в левой и правой частях равенства, формулу (2) и убедиться в равенстве полученных выражений.

8°. Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на любой общий множитель λ , то величина определителя не изменится.

В самом деле, полученный в результате такого прибавления определитель согласно свойству 7° можно разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй имеет два пропорциональных столбца и в силу свойства 6° равен

нулю. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для формулировки следующего свойства определителя познакомимся с понятиями алгебраического дополнения и минора.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Например, минором элемента a_1 определителя Δ является определитель второго порядка $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, минором элемента b_1 — определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и т. д.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^p$, где p — сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Алгебраическое дополнение элемента обозначается такой же прописной буквой, что и сам элемент. Так, алгебраическое дополнение элемента a_1 обозначается через A_1 , элемента b_1 — через B_1 и т. д.

Если, например, элемент a_2 находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него $p = 1 + 2 = 3$ и алгебраическим дополнением является

$$A_2 = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_3 c_1 - b_1 c_3.$$

Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента отличаются только знаком.

9°. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца или строки на их алгебраические дополнения.

Иначе говоря, имеют место следующие равенства:

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3, \quad \Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1; \quad (3)$$

$$\Delta = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3, \quad \Delta = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2; \quad (4)$$

$$\Delta = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3, \quad \Delta = a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3. \quad (5)$$

Чтобы доказать, например, первое из этих равенств, достаточно записать правую часть формулы (2) в виде

$$\Delta = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

Величины, стоящие в скобках, являются алгебраическими дополнениями элементов a_1, a_2, a_3 , т. е.

$$b_2 c_3 - b_3 c_2 = A_1, \quad b_3 c_1 - b_1 c_3 = A_2, \quad b_1 c_2 - b_2 c_1 = A_3.$$

Отсюда и из предыдущего равенства получаем

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3,$$

что и требовалось доказать. Равенства (3) — (5) доказываются аналогично.

Запись определителя по какой-нибудь из формул (3) — (5) называется разложением его по элементам некоторого столбца или некоторой строки (первая формула дает разложение по элементам первого столбца и т. д.).

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам первой строки.

Решение. Имеем

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8.$$

10°. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца или какой-нибудь строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца или другой строки равна нулю.

Докажем, например, что сумма произведений элементов второго столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов первого столбца равна нулю. Для этого разложим определитель (1) по элементам первого столбца

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3. \quad (6)$$

Алгебраические дополнения A_1, A_2, A_3 не зависят от самих элементов a_1, a_2, a_3 . Поэтому, если в обеих частях равенства (6) числа a_1, a_2, a_3 заменить произвольными числами h_1, h_2, h_3 , то получим верное равенство

$$\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3. \quad (7)$$

Если теперь в равенстве (7) в качестве h_1, h_2, h_3 взять элементы b_1, b_2, b_3 второго столбца и учесть, что согласно свойству 3° определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю, то получим

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются равенства

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0,$$

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0, \quad a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0,$$

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0, \quad b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0$$

и шесть подобных равенств, относящихся не к столбцам, а к строкам:

$$\begin{aligned} a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 &= 0, & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 &= 0, \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 &= 0, & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 &= 0, \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 &= 0, & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 &= 0. \end{aligned}$$

§ 3. Исследование системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Теория матриц и определителей имеет широкое применение как в самой математике, так и в ее приложениях. Это очень удобный и часто используемый в самых разнообразных исследованиях математический аппарат.

Рассмотрим применение матриц и определителей к исследованию системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y, z :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases} \quad (1)$$

(коэффициенты $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ и свободные члены h_1, h_2, h_3 считаются заданными).

Тройка чисел x_0, y_0, z_0 называется *решением системы (1)*, если в результате подстановки этих чисел вместо x, y, z все три уравнения (1) обращаются в тождества.

В дальнейшем основную роль будут играть следующие четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *определителем системы (1)*. Определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ получаются из определителя системы Δ заменой свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

Рассмотрим отдельно два случая: когда определитель Δ системы отличен от нуля и когда этот определитель равен нулю.

С л у ч а й 1. $\Delta \neq 0$. Докажем, что решение системы (1) существует и единственно. Для этого умножим обе части первого уравнения системы (1) на алгебраическое дополнение A_1 , второго — на A_2 , третьего — на A_3 , а затем сложим эти уравнения. В результате

получим

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3.$$

Отсюда на основании 9° и 10° свойств определителей имеем

$$\Delta \cdot x = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 = \Delta_x.$$

Аналогично найдем

$$\Delta \cdot y = h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3 = \Delta_y, \Delta \cdot z = h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3 = \Delta_z.$$

Таким образом, из системы (1) получена система уравнений

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (2)$$

Формулы (2) называются *формулами Крамера* *.

Чтобы доказать, что решение системы (1) существует, подставим вместо x, y, z значения, определяемые формулами Крамера, и убедимся, что все три уравнения (1) обращаются при этом в тождества. Проверим, например, что первое уравнение обращается в тождество. Имеем

$$a_1x + b_1y + c_1z = a_1 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1 \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \{a_1(h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3) + \\ + b_1(h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3) + c_1(h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3)\} = \\ = \frac{1}{\Delta} \{h_1(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + h_2(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2) + \\ + h_3(a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3)\} = h_1,$$

так как согласно свойству 9° определителей

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta,$$

а согласно свойству 10°

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0.$$

Итак, установлено, что первое уравнение системы (1) обращается в тождество. Аналогично можно показать, что в тождество обращаются второе и третье уравнения системы.

Таким образом, решение системы (1) существует.

Формулы Крамера (2) доказывают также единственность решения системы (1), так как система (2) — следствие системы (1), и поэтому всякое решение системы (1) является решением и системы (2), т. е. выражается по формулам Крамера.

Все изложенное позволяет сделать следующий вывод: *если определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то существует, и притом единственное, решение этой системы, и оно выражается формулами Крамера.*

* Крамер Габриель (1704—1752) — швейцарский математик.

Пример. Найти все решения системы

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

Решение. Так как $\Delta = 33 \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, определяемое формулами (2):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Следовательно, $x=1, y=1, z=1$ — решение данной системы.

Случай 2. $\Delta = 0$. Пусть хотя бы один из определителей $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ отличен от нуля. Тогда хотя бы одно из равенств (2) невозможно*, т. е. система (2) не имеет решений, и поэтому не имеет решений и система (1), так как система (2) — следствие системы (1).

Пусть теперь Δ_x, Δ_y и Δ_z равны нулю. Сначала исследуем однородные системы.

Однородной системой трех уравнений первой степени с тремя неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что эта система всегда имеет *нулевое решение*: $x=0, y=0, z=0$. Если $\Delta \neq 0$, то это решение является единственным (в силу случая 1).

Покажем, что если определитель $\Delta = 0$, то система (3) имеет бесконечно много ненулевых решений. Доказательство проведем в два этапа.

1) Предположим, что хотя бы один из миноров определителя Δ отличен от нуля. Пусть, например, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда однородную систему, составленную из двух первых уравнений (3), можно представить в виде

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z, \\ a_2x + b_2y = -c_2z. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим алгебраические дополнения A_3, B_3, C_3 элементов третьей строки определителя:

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

* Действительно, пусть, например, $\Delta_x \neq 0$. Тогда равенство $\Delta \cdot x = \Delta_x$ невозможно, так как его левая часть $\Delta \cdot x = 0$ при любом x , а правая часть $\Delta_x \neq 0$.

Так как, по условию, $C_3 \neq 0$, то для каждого z существует единственное решение системы (4). Его можно записать в виде $x = \frac{A_3}{C_3}z$, $y = \frac{B_3}{C_3}z$. Положим $z = C_3t$, где t может принимать любые значения. Тогда очевидно, что однородная система (4) имеет бесконечно много решений, определяемых формулами

$$x = A_3t, y = B_3t, z = C_3t, \quad (5)$$

где t — произвольное число.

Осталось показать, что x , y и z , определяемые формулами (5), обращают в тождество и третье уравнение однородной системы (3). В самом деле, подставляя выражения для x , y , z по формулам (5) в левую часть третьего уравнения, находим

$$a_3x + b_3y + c_3z = (a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3)t = \Delta \cdot t = 0 \cdot t = 0.$$

Таким образом, формулы (5) при любом t определяют решение однородной системы (3).

2) Предположим теперь, что все миноры определителя Δ равны нулю. Это значит, что коэффициенты всех трех уравнений (3) пропорциональны. Но тогда второе и третье уравнения (3) являются следствием первого и могут быть отброшены, а одно уравнение с тремя неизвестными $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, очевидно, имеет бесконечно много решений (двум неизвестным можно придавать произвольные значения, а третье неизвестное определять из уравнения).

Итак, доказано, что однородная система (3) с определителем Δ , равным нулю, имеет бесконечно много решений.

Теперь рассмотрим систему (1), когда все четыре определителя Δ , Δ_x , Δ_y и Δ_z равны нулю. Докажем, что если в этом случае система (1) имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много решений.

Пусть система (1) имеет решение x_0, y_0, z_0 . Тогда справедливы тождества

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = h_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = h_2, \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = h_3. \end{cases} \quad (6)$$

Вычитая почленно из уравнений (1) тождества (6), получаем систему уравнений, эквивалентную (1):

$$\begin{cases} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0, \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) = 0, \\ a_3(x - x_0) + b_3(y - y_0) + c_3(z - z_0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Это однородная система трех уравнений первой степени с неизвестными $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ и $(z - z_0)$ и определителем Δ , равным нулю. Но согласно только что доказанному эта система имеет бесконечно много решений, следовательно, и система (1) имеет бесконечно много решений. Например, в случае, когда отличен от нуля минор C_3 , в силу формул (5) решение системы (1) можно представить

в виде

$$x = x_0 + A_3 t, y = y_0 + B_3 t, z = z_0 + C_3 t,$$

где t принимает любые значения. Тем самым утверждение доказано и можно сделать следующее заключение: если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система (1) либо совсем не имеет решений, либо их бесконечно много.

В качестве примера предлагаем самостоятельно рассмотреть следующие три системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4, \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3, \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 3, \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

и убедиться в том, что первая из них не имеет решений ($\Delta = 0$, $\Delta_y = 1 \neq 0$), вторая имеет бесконечно много решений ($\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$), определяемых формулами $x = 1$, $y = t$, $z = -t$, а третья не имеет решений ($\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$), но уже первые два уравнения этой системы не совместны, так как если умножить первое из них на 2 и вычесть из второго, то получим невозможное равенство $0 = 1$.

§ 4. Матричная запись системы линейных уравнений. Понятие обратной матрицы

Рассмотрим снова систему уравнений (1) из § 3:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = h_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = h_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = h_3. \end{cases} \quad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Тогда, используя правило умножения матриц, систему (1) можно записать в эквивалентном матричном виде

$$AX = H, \quad (3)$$

где A — заданная матрица; H — заданный вектор-столбец; X — неизвестный вектор-столбец. Решением уравнения (3) является такой вектор-столбец X , который обращает уравнение (3) в тождество.

Пусть определитель Δ матрицы A отличен от нуля. Тогда, как установлено в § 3, система (1) и, следовательно, система (3) имеют единственное решение, которое находится по формулам Крамера. Дадим теперь другую форму записи решения уравнения (3). Для этого введем понятие обратной матрицы.

Обратной для матрицы A называется такая матрица (обозначение A^{-1}), которая удовлетворяет условиям

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \quad (4)$$

где E — единичная матрица.

Докажем, что если определитель $\Delta \neq 0$, то обратной для матрицы A является следующая матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1/\Delta & A_2/\Delta & A_3/\Delta \\ B_1/\Delta & B_2/\Delta & B_3/\Delta \\ C_1/\Delta & C_2/\Delta & C_3/\Delta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где, как и ранее, A_i, B_i, C_i — алгебраические дополнения соответственно элементов a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$). Для этого нужно доказать, что матрица (5) удовлетворяет условиям (4). Проверим, например, справедливость равенства

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Умножая матрицу A на матрицу A^{-1} по правилу умножения матриц, получаем

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1/\Delta & A_2/\Delta & A_3/\Delta \\ B_1/\Delta & B_2/\Delta & B_3/\Delta \\ C_1/\Delta & C_2/\Delta & C_3/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Здесь использован тот факт, что в силу свойств 9° и 10° определителя имеют место равенства

$$a_i A_j + b_i B_j + c_i C_j = \begin{cases} \Delta & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому, в частности, элемент матрицы AA^{-1} , стоящий на пересечении первой строки и первого столбца, равен $(a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1)/\Delta = \Delta/\Delta = 1$, а элемент, стоящий на пересечении первой строки и второго столбца, равен $(a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2)/\Delta = 0$.

Можно убедиться в том, что и остальные элементы матрицы AA^{-1} равны соответствующим элементам матрицы E . Итак, $AA^{-1} = E$. Аналогично можно доказать, что $A^{-1}A = E$.

Таким образом, обратной для матрицы A является матрица A^{-1} , определяемая формулой (5). Из равенств (4) следует, что матрица A — обратная для матрицы A^{-1} . Поэтому матрицы A и A^{-1} называются *взаимнообратными*.

З а м е ч а н и е. Если определитель матрицы A равен нулю ($\Delta = 0$), то обратная матрица не существует.

Воспользуемся обратной матрицей для решения уравнения (3). Умножая уравнение (3) слева на матрицу A^{-1} , получаем

$$A^{-1}AX = A^{-1}H. \quad (6)$$

Так как $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, то из (6) следует равенство

$$X = A^{-1}H. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение, полученное для X , действительно является решением уравнения (3). В самом деле, подставляя это выражение в уравнение (3), имеем

$$AA^{-1}H = H.$$

Это равенство является тождеством, так как $AA^{-1} = E$, а $EH = H$.

Итак, если $\Delta \neq 0$, то решение уравнения (3), значит и системы (1), можно записать в матричном виде (7). Это решение, конечно, то же самое, что было получено в § 3 по формулам Крамера. Этот факт, вытекающий из единственности решения системы (1) при $\Delta \neq 0$, можно непосредственно проверить, если подставить в формулу (7) выражение (5) для A^{-1} и выражения (2) для X и H . Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1/\Delta & A_2/\Delta & A_3/\Delta \\ B_1/\Delta & B_2/\Delta & B_3/\Delta \\ C_1/\Delta & C_2/\Delta & C_3/\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

откуда $x = (h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3)/\Delta = \Delta_x/\Delta$, $y = (h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3)/\Delta = \Delta_y/\Delta$, $z = (h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3)/\Delta = \Delta_z/\Delta$, т. е. получили формулы Крамера.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y + z = -1, \\ x + 3y + z = 2. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A равен $1 \neq 0$. Следовательно, матрица A имеет обратную. По формуле (5) находим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу A^{-1} , по формуле (7) получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$.

В заключение заметим, что при исследовании систем уравнений первой степени со многими неизвестными и во многих других задачах математики и ее приложений приходится иметь дело с матрицами и определителями произвольного n -го порядка ($n = 2, 3, 4$,

5, ...). Теория матриц и определителей произвольного порядка строится аналогично изложенной теории матриц и определителей третьего порядка. Однако строгое ее построение требует введения дополнительных понятий и доказательства ряда сложных теорем. Желая расширить и углубить свои знания могут познакомиться с этой теорией и с теорией систем уравнений первой степени со многими неизвестными по любому курсу высшей алгебры*.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Понятие функции нескольких переменных

1. Вводные замечания. До сих пор мы рассматривали функции одной переменной, т. е. функции, значения которых зависят от значений одной независимой переменной.

При рассмотрении многих вопросов естествознания приходится иметь дело с такими зависимостями между переменными величинами, в которых числовые значения одной из них полностью определяются значениями нескольких других. Так, например, температура тела в данный момент времени t может изменяться от точки к точке. Каждая точка тела определяется тремя координатами x , y и z , поэтому температура зависит от трех переменных x , y и z , а если еще учитывать зависимость температуры от времени t , то значения ее будут уже определяться значениями четырех переменных x , y , z и t . Площадь прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y , определяется значениями двух переменных x и y , а объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x , y , z , — значениями трех переменных x , y и z . Примеров таких зависимостей можно привести сколько угодно.

Эта часть курса и посвящается рассмотрению такого рода зависимостей. С этой целью вводится понятие функции нескольких переменных и развивается аппарат для исследования таких функций.

2. Определение функции двух и более переменных. Аналогично функции одной переменной вводится понятие функции двух переменных.

Определение. Пусть X , Y и Z — некоторые числовые множества. Функцией двух переменных называется множество $\{$ упорядоченных троек чисел $(x; y; z)$ ** таких, что $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ и каждая упорядоченная пара чисел $(x; y)$ входит в одну и только одну тройку этого множества, а каждое z входит, по крайней мере, в одну трой-

* См., например: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.

** Напомним, что тройка чисел x , y и z называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, какое — вторым и какое — третьим.

ку. При этом говорят, что упорядоченной паре чисел $(x; y)$ поставлено в соответствие число z , и пишут $z = f(x; y)$. Число z называется значением функции f в точке $(x; y)$. Переменную z называют зависимой переменной, а переменные x и y — независимыми переменными (или аргументами); множество $\{(x; y)\}$ — областью определения функции, а множество Z — множеством значений функции.

Функцию двух переменных обозначают также следующими символами: $z = z(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = h(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т. д.

Так как каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ при фиксированной прямоугольной системе координат соответствует единственная точка M плоскости и, наоборот, каждой точке M соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x; y)$, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и вместо $z = f(x, y)$ писать $z = f(M)$. Областью определения функции в этом случае является некоторое множество $\{M\}$ точек плоскости. В дальнейшем будем использовать эти два обозначения функции двух переменных.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. В примерах мы используем, как правило, аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры функций двух переменных.

1. $z = x^2 + y^2$. Область определения этой функции — множество $\{M\}$ всех пар чисел $(x; y)$, т. е. вся плоскость Oxy , а множество значений — промежуток $Z = [0, +\infty)$.

2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Областью определения данной функции является множество всех точек, для которых выражение $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определено, т. е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Множество всех таких точек образует круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Множество значений функции представляет собой отрезок $[0, 1]$.

3. $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Область определения этой функции — множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 > 1$, т. е. множество точек, лежащих вне круга с радиусом 1 и центром в начале координат, а множество значений представляет собой промежуток $(0, +\infty)$.

Из рассмотренных примеров следует, что областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость Oxy или ее часть.

Из аналитической геометрии известно, что множество всех упорядоченных троек чисел $(x; y; z)$ образует координатное пространство. При этом каждой тройке $(x; y; z)$ в пространстве соответствует точка $M(x; y; z)$, и наоборот. Если вместо множества $\{M\}$ точек плоскости взять множество $\{M\}$ точек пространства, то аналогично можно дать определение функции трех переменных

$u=f(M)$ или $u=f(x; y; z)$. Областью определения функции трех переменных является все пространство или его часть. Так, например, функция $u=x^2+y^2+z^2$ определена во всем пространстве, а функция $u=\ln xyz$ — на множестве точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству $xyz>0$. В первом случае множеством значений функции является промежуток $[0, +\infty)$, а во втором — $(-\infty, +\infty)$.

Аналогично можно дать определение функции четырех переменных $u=f(x, y, z, t)$. В этом случае множество упорядоченных четверок чисел $(x; y; z; t)$ образуют так называемое четырехмерное пространство, а каждая четверка $(x; y; z; t)$ называется точкой этого пространства. Однако область определения функции четырех переменных уже не имеет наглядного геометрического истолкования. Аналогично можно ввести понятия функции пяти и вообще n переменных $u=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Далее подробно рассмотрены функции двух переменных; следует иметь в виду, что обобщение определений и полученных результатов на функции трех и более переменных не содержит принципиальных отличий.

§ 2. Геометрическое изображение функций двух переменных

Как известно, функция одной переменной изображается на плоскости в виде линии, определенной уравнением $y=f(x)$. Функция двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, которая определяется уравнением $z=f(x, y)$, т. е. сама формула, задающая функцию, и есть уравнение этой поверхности.

В аналитической геометрии рассматриваются различные поверхности и их уравнения. Так, например, уравнение $z-2x+5y+10=0$ является уравнением плоскости. Данная плоскость есть график функции $z=2x-5y-10$.

Уравнение $x^2+y^2+z^2=R^2$ является уравнением сферы радиуса R с центром в начале координат. С другой стороны, сфера есть объединение графиков двух функций $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ и $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Построение графиков функций двух переменных во многих случаях представляет значительные трудности. Поэтому существует еще один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z=f(x, y)$ плоскостями $z=c$, где c — любое число, т. е. плоскостями, параллельными плоскости Oxy .

Назовем *линией уровня* функции $z=f(x, y)$ множество точек $(x; y)$ плоскости Oxy , в которых функция принимает одно и то же значение c . Очевидно, при различных c получаются различные линии уровня для данной функции.

Если взять числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, образующие арифметическую прогрессию с разностью h , то получим ряд линий уровня, по взаимному расположению которых можно получить представление о графике функции, т. е. о форме поверхности. Там, где линии располагаются «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность идет

круче), а в тех местах, где линии уровня располагаются реже, функция изменяется медленнее (поверхность более пологая) (рис. 162). Ясно, что чем меньше h , тем полнее представление о графике функции.

Термин «линии уровня» заимствован из картографии. Там линии уровня — это линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря постоянна. По ним можно судить не только о высоте над уровнем моря определенной точки местности, но и о характере рельефа, что особенно важно, если местность гористая.

Пример. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

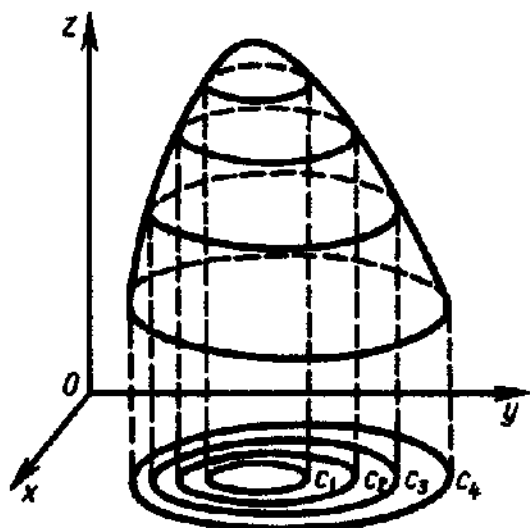


Рис. 162

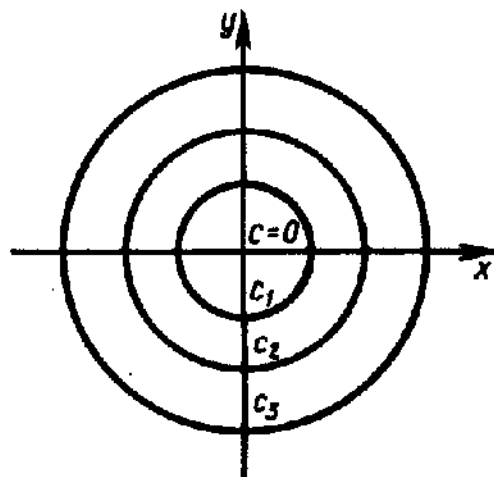


Рис. 163

Решение. Линии уровня данной функции определяются уравнением $x^2 + y^2 = c$ ($0 \leq c < +\infty$). Давая c различные значения, получаем семейство линий уровня, представляющих собой концентрические окружности. При $c=0$ окружность вырождается в точку $(0; 0)$ (рис. 163).

Так как в данном случае линии уровня — окружности с центрами в начале координат, то графиком данной функции должна быть поверхность вращения вокруг оси Oz . Действительно, из аналитической геометрии известно, что уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения.

§ 3. Предел функции двух переменных

Введем понятие δ -окрестности данной точки $M_0(x_0; y_0)$ и понятие сходящейся последовательности точек плоскости.

Определение 1. Множество $\{M(x; y)\}$ всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, или, короче, $\rho(M; M_0) < \delta$, называется δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$.

Другими словами, δ -окрестность точки M_0 — это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 радиуса δ .

Рассмотрим последовательность точек $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n), \dots$. Будем кратко обозначать эту последовательность символом $\{M_n\}$ *

Определение 2. Последовательность точек $\{M_n\}$ называется сходящейся к точке M_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $\rho(M_n; M_0) < \varepsilon$. При этом точка M_0 называется пределом последовательности $\{M_n\}$.

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$ или $M_n \rightarrow M_0$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что понятие сходящейся последовательности точек плоскости является обобщением понятия сходящейся числовой последовательности. Действительно, задание последовательности $\{M_n\}$ точек на прямой равносильно заданию числовой последовательности $\{x_n\}$ и неравенство $\rho(M_n; M_0) < \varepsilon$ переходит в этом случае в неравенство $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Теперь определим предел функции двух переменных. Его определение аналогично определению предела функции одной переменной**.

Пусть функция $z = f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\}$ и точка $M_0 \in \{M\}$ или $M_0 \notin \{M\}$, но обладает тем свойством, что в любой δ -окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от M_0 .

Определение 3. Число A называется пределом функции $z = f(M)$ в точке M_0 , если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ ($M_n \neq M_0, M_n \in \{M\}$) соответствующая последовательность значений функции $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_n), \dots$ сходится к A .

Обозначение: $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$ или $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$.

Так, например, функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости. Найдем предел этой функции в точке $M_0(1; 2)$. Для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке M_0 , имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + y_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = 1^2 + 2^2 = 5,$$

следовательно, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + y^2) = 5$.

Приведем пример функции, не имеющей предела в некоторой точке. Функция $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ определена всюду, кроме точек прямой $x+y=0$. Покажем, что она не имеет предела в точке $(0; 0)$. Для этого выберем две сходящиеся к точке $(0; 0)$ последовательности точек $M_n(1/n; 0)$ и $M'_n(0; 1/n)$; тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n - 0}{1/n + 0} = 1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} f(M'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 - 1/n}{0 + 1/n} = -1.$$

* Задание последовательности $\{M_n\}$ равносильно заданию двух числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, так как точка на плоскости определяется двумя координатами x и y .

** Рекомендуем повторить гл. 4, § 2, п. 1.

Таким образом, двум различным последовательностям точек, сходящимся к началу координат, соответствуют две последовательности значений функции, которые имеют разные пределы. Следовательно, по определению 3 данная функция не имеет предела в точке $(0; 0)$.

Приведенное определение предела функции двух переменных дано с помощью понятия предела последовательности. Так же, как для функции одной переменной, можно дать эквивалентное определение, используя « $\varepsilon - \delta$ »-терминологию.

Определение 4. Число A называется пределом функции $z = f(M)$ в точке M_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M; M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Используя логические символы, данное определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall M \in \{M\}, 0 < \rho(M; M_0) < \delta : |f(M) - A| < \varepsilon).$$

Доказательство эквивалентности определений 3 и 4 проводится точно так же, как и в случае функции одной переменной. Следует только в доказательстве теоремы 4.1 заменить последовательность $\{x_n\}$ последовательностью точек $\{M_n\}$, точку x_0 — точкой M_0 , разности $|x - x_0|$ и $|x_n - x_0|$ — соответственно расстояниями $\rho(M; M_0)$ и $\rho(M_n; M_0)$, а числовую последовательность $\{f(x_n)\}$ — числовой последовательностью $\{f(M_n)\}$.

Используя определение предела функции двух переменных, можно перенести основные теоремы о пределах для функции одной переменной на функции двух переменных. Например, имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на одном и том же множестве $\{M\}$ и имеют в точке M_0 пределы B и C . Тогда функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ и $f(M)/g(M)$ ($C \neq 0$) имеют в точке M_0 пределы, равные соответственно $B \pm C$, $B \cdot C$ и B/C .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.3 и может быть получено из него формальной заменой букв x и x_0 буквами M и M_0 , только вместо определения 1 предела функции одной переменной следует использовать определение 3 предела функции двух переменных.

Определение 5. Функция $z = f(M)$ называется бесконечно малой в точке $M = M_0$ (или при $M \rightarrow M_0$), если $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$.

Если функция $z = f(M)$ имеет в точке M_0 предел, равный A , то функция $\alpha(M) = f(M) - A$ является бесконечно малой в точке M_0 . Действительно, $\lim_{M \rightarrow M_0} \alpha(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) - A] = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) -$

$\lim_{M \rightarrow M_0} A = A - A = 0$. Отсюда получаем специальное представление для функции, имеющей в точке M_0 предел, равный A : $f(M) = A + \alpha(M)$, где $\lim_{M \rightarrow M_0} \alpha(M) = 0$. При этом говорят, что функция

$f(M)$ в окрестности точки M_0 отличается от числа A на бесконечно малую функцию.

Сравнение бесконечно малых функций двух переменных производится точно так же, как и бесконечно малых функций одной переменной, причем, как и в случае одной переменной, под символом $o(\beta)$ будем понимать любую бесконечно малую в данной точке M_0 функцию более высокого порядка малости, чем бесконечно малая в точке M_0 функция $\beta(M)$, т. е. $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{o(\beta)}{\beta} = 0$.

§ 4. Непрерывность функции двух переменных

Понятие непрерывности функции двух переменных вводится на основе понятия предела.

1. Определение непрерывности функции двух переменных. Пусть на некотором множестве $\{M\}$ определена функция $f(M)$, точка $M_0 \notin \{M\}$ и любая δ -окрестность точки M_0 содержит точки множества $\{M\}$.

Определение 1. Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 , если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0), \text{ или } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Согласно определению предела функции в терминах последовательностей данное определение непрерывности функции в точке M_0 равносильно тому, что для любой последовательности $\{M_n\}$ ($M_n \in \{M\}$) такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$, последовательность $\{f(M_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(M_n) = f(M_0), \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва* этой функции.

Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{при } x+y \neq 0, \\ 1 & \text{при } x+y = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $(0; 0)$, так как предел этой функции при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ не существует; функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{всюду, кроме } x=1, y=2, \\ 0 & \text{при } x=1, y=2 \end{cases}$$

в точке $(1; 2)$ разрывна, так как $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} f(x, y) = 5$, а $f(1; 2) = 0$.

Сформулируем определение непрерывности функции, используя определение предела функции в терминах « $\varepsilon - \delta$ ».

Определение 2. Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M; M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Используя символы, определение 2 можно записать в виде $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall M \in \{M\}, \rho(M; M_0) < \delta) : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Так же как для функции одной переменной, используя данные определения непрерывности и соответствующие теоремы о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложных функций из непрерывных функций приводят к непрерывным функциям.

В дальнейшем используется определение 1 непрерывности функции, записанное в другом виде.

Назовем *полным приращением* функции $z = f(M)$ в точке M_0 функцию Δz , определяемую формулой

$$\Delta z = f(M) - f(M_0),$$

где M — любая точка из области определения функции. Пусть точки M_0 и M имеют соответственно координаты $(x_0; y_0)$ и $(x; y)$. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$. Используя эти обозначения, для Δz получаем следующее выражение:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 3. Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0 , если ее полное приращение в этой точке есть бесконечно малая при $M \rightarrow M_0$ функция, т. е.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta z = \lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0, \text{ или } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Это условие, очевидно, равносильно условию $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ из определения 1.

Пример. Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в любой точке $(x; y)$. Действительно, полное приращение данной функции в точке $(x; y)$ имеет вид

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Очевидно, $\Delta z \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, т. е. согласно определению 3 функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна в точке $(x; y)$.

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной на некотором множестве $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

2. Основные свойства непрерывных функций двух переменных. Приведем без доказательства основные свойства непрерывных функций двух переменных, поскольку они в основном аналогичны доказательствам соответствующих свойств функций одной переменной. Предварительно введем ряд понятий для множеств $\{M\}$ точек плоскости.

Определение 4. Множество $\{M\}$ точек плоскости называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек данного множества.

Например, круг — связное множество, а множество, состоящее из двух кругов, не имеющих общих точек, не является связным.

Определение 5. Точка M называется внутренней точкой множества $\{M\}$, если существует δ -окрестность этой точки, состоящая из точек данного множества.

Определение 6. Множество $\{M\}$, состоящее лишь из внутренних точек, называется открытым множеством.

Определение 7. Связное открытое множество $\{M\}$ точек называется открытой областью, или короче, областью.

Простейшими областями являются: внутренность треугольника, круга, эллипса и т. п.

Определение 8. Точка M называется граничной точкой области, если в любой ее δ -окрестности есть точки как принадлежащие, так и не принадлежащие этой области. Множество всех граничных точек области называется границей этой области.

Например, для области, которая состоит из точек, лежащих внутри круга, границей является окружность.

Определение 9. Множество $\{M\}$ точек, образованное областью и ее границей, называется замкнутой областью.

Определение 10. Множество $\{M\}$ называется ограниченным, если существует круг, внутри которого оно содержится.

Отрезок и треугольник — ограниченные множества. Прямая не является ограниченным множеством.

Замкнутая ограниченная область, в которой определена функция двух переменных, является аналогом отрезка для функции одной переменной.

Теперь сформулируем основные свойства непрерывных функций двух переменных.

1°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она ограничена в этой области, т. е. существует число k такое, что для всех точек области выполняется неравенство $|f(M)| \leq k$.

2°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она достигает в этой области своих точных границей.

3°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в области, то она принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т. е. если $A < C < B$, где A и B — какие-то значения функции $f(M)$ в данной области, то в этой области существует точка M_0 , в которой $f(M_0) = C$.

Отсюда, в частности, следует, что если M_1 и M_2 — точки данной области и $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в области существует точка M_0 , в которой $f(M_0) = 0$.

4°. Если функция $z=f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она равномерно-непрерывна в этой области, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых двух

точек M' и M'' области, удовлетворяющих условию $\rho(M'; M'') < \delta$, выполняется неравенство $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon$.

В заключение отметим, что понятия предела, непрерывности и перечисленные свойства функций двух переменных легко обобщаются на функции трех и более переменных.

ГЛАВА 12

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Частные производные

Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)^*$. Придадим переменной x в точке M произвольное приращение Δx , оставляя значение переменной y неизменным, т. е. перейдем на плоскости от точки $M(x; y)$ к точке $M_1(x + \Delta x; y)$. При этом Δx таково, что точка M_1 лежит в указанной окрестности точки M . Тогда соответствующее приращение функции

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

называется *частным приращением функции по переменной x в точке $M(x; y)$* .

Аналогично определяется *частное приращение функции по переменной y* :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right),$$

то он называется *частной производной функции $z = f(M)$ в точке M по переменной x (по переменной y)* и обозначается одним из следующих символов:

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \left(z'_y, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

(иногда частные производные обозначают без штриха).

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y . Поэтому частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

* Окрестностью точки M называется произвольная область, содержащая точку M . В частности, если область — внутренность круга радиуса δ с центром в точке M , то такая окрестность является δ -окрестностью точки M .

Примеры.

1. $z = x^2 - 2xy^2 + y^3$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 3y^2$.

2. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$.

3. $z = x^2 \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$.

4. $z = xye^{x+2y}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y}y(1+x)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+2y}x(1+2y)$.

Отметим, что мы определили частные производные функции $z = f(x, y)$ в такой точке M , в окрестности которой функция определена, т. е. во внутренней точке области определения функции. Если $M(x; y)$ — граничная точка области определения функции, то $\Delta_x z$ ($\Delta_y z$) может быть не определено, так как точка $M_1(x + \Delta x; y)$ ($M_2(x; y + \Delta y)$) может не принадлежать области определения функции ни при каком $\Delta x \neq 0$ ($\Delta y \neq 0$). Это, например, имеет место для точки M_0 на рис. 164. В этом случае, если существует частная производная z'_x во внутренних точках M области и существует $\lim_{M \rightarrow M_0} z'_x(M)$, то по определению полагают

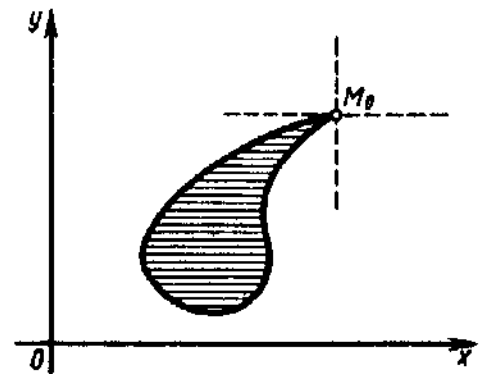


Рис. 164

$$z'_x(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} z'_x(M).$$

Аналогично определяется $z'_y(M_0)$.

§ 2. Понятие дифференцируемости функции

1. **Определение дифференцируемости.** Напомним, что полным приращением функции $z = f(M)$ в точке $M(x; y)$, соответствующим приращениям Δx и Δy переменных x и y , называется функция

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M .

Определение. Функция $z = f(M)$ называется дифференцируемой в точке M , если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (1)$$

где A и B — некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ функции.

Известно, что если функция одной переменной дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна и имеет производную в этой точке. Из существования производной функции одной переменной

в данной точке следует дифференцируемость функции в этой точке. Выясним, как переносятся эти свойства на функции двух переменных.

2. Необходимые условия дифференцируемости. Теорема 12.1. Если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M , то, как следует из соотношения (1), $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$,

а это и означает, что функция непрерывна в точке M . ■

Теорема 12.2. Если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, причем

$$f'_x(x, y) = A, f'_y(x, y) = B.$$

Доказательство. Так как функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M , то имеет место соотношение (1). Полагая $\Delta y = 0$, имеем $\Delta_x z = A \Delta x + \alpha(\Delta x, 0) \Delta x$, где $\alpha(\Delta x, 0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$ функция. Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A.$$

Следовательно, в точке M существует частная производная $f'_x(x, y) = A$.

Аналогично доказывается, что в точке M существует частная производная $f'_y(x, y) = B$. ■

Обратные утверждения к теоремам 12.1 и 12.2 неверны, т. е. из непрерывности функций двух переменных в точке M , а также из существования ее частных производных в этой точке еще не следует дифференцируемость функции.

Например, функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в точке $(0; 0)$, но не имеет в этой точке частных производных. В самом деле,

$$\frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Но функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, $f'_x(0, 0)$ не существует. Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0, 0)$. Так как данная функция не имеет частных производных в точке $(0; 0)$, то она и не дифференцируема в данной точке.

Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на осях координат,} \\ 1 & \text{в остальных точках плоскости} \end{cases}$$

имеет частные производные по x и y в точке $(0; 0)$. Это следует из того, что $f(x, 0) \equiv 0$ и $f(0, y) \equiv 0$, следовательно, $f'_x(0, 0) = 0$ и $f'_y(0, 0) = 0$. Но $f(x, y)$ не является непрерывной в этой точке,

так как, например, вдоль прямой $y=x$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1$, а $f(0, 0) = 0$. Следовательно, $f(x, y)$ недифференцируема в точке $(0; 0)$.

И последний пример: функция $f(x, y) = \sqrt{|x| |y|}$ непрерывна в точке $(0; 0)$, так как $f(0, 0) = 0$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, и имеет частные производные по x и y в этой точке:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0 \cdot |\Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0,$$

но, тем не менее, данная функция не является дифференцируемой в точке $(0; 0)$. Действительно, полное приращение функции в точке $(0; 0)$ равно

$$\Delta z = \sqrt{|\Delta x| |\Delta y|}.$$

Если бы функция была дифференцируема в точке $(0; 0)$, то, как следует из соотношения (1) и теоремы 12.2, выполнялось бы равенство

$$\Delta z = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где α и $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Далее из равенства

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = \left(\frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right) \rho = \gamma \rho, \text{ где } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

получаем, что $\gamma \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ [см. § 4 вывод формулы (3)]. Но в данном случае при любых $\Delta x = \Delta y$

$$\gamma = \sqrt{|\Delta x| |\Delta y|} / \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 1/\sqrt{2},$$

т. е. не является бесконечно малой функцией при $\rho \rightarrow 0$.

Таким образом, функция $f(x, y) = \sqrt{|x| |y|}$ непрерывна в точке $(0; 0)$, имеет в этой точке частные производные и, тем не менее, не является дифференцируемой в этой точке.

3. Достаточные условия дифференцируемости. Теорема 12.3. Если функция $z = f(M)$ имеет частные производные в некоторой δ -окрестности точки M и эти производные непрерывны в самой точке M , то функция дифференцируема в точке M .

Доказательство. Придадим переменным x и y столь малые приращения Δx и Δy , чтобы точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ не выходила за пределы указанной δ -окрестности точки M . Полное приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

можно записать в виде

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (2)$$

Выражение $[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$ можно рассматривать как приращение функции $f(x, y + \Delta y)$ одной переменной x (второй аргумент имеет постоянное значение, равное $y + \Delta y$). Так

как согласно условию эта функция имеет производную $f'_x(x, y + \Delta y)$, то по теореме Лагранжа получаем

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) &= \\ = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x, 0 < \theta_1 < 1. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, для выражения $[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$ имеем

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y, 0 < \theta_2 < 1.$$

Производные f'_x и f'_y непрерывны в точке $M(x; y)$, поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) &= f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) &= f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Подставляя полученные выражения в формулу (2) для Δz , находим

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

а это и означает, что функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке M . ■

С л е д с т в и е. Из непрерывности частных производных следует непрерывность самой функции.

Теорема 12.3 имеет важное значение для установления дифференцируемости функций, поскольку непосредственная проверка дифференцируемости функции с помощью определения часто затруднительна, в то время как проверка непрерывности частных производных оказывается проще.

В заключение заметим, что понятие дифференцируемости для функций трех и более переменных вводится аналогично случаю функции двух переменных.

§ 3. Производные сложных функций

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных x и y , каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f[x(t), y(t)]$ является сложной функцией независимой переменной t , а переменные x и y — промежуточные переменные. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 12.4. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M[x(t); y(t)]$, то сложная функция $z = f[x(t), y(t)]$ также диф-

ференцируема в точке t . При этом производная этой сложной функции вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (1)$$

Доказательство. Придадим переменной t произвольное приращение Δt ; тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ получают соответственно приращения Δx и Δy , а функция $z = f(x, y)$, в свою очередь, приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, то Δz можно записать в виде

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Доопределим эти функции при $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, положив $\alpha(0, 0) = 0$, $\beta(0, 0) = 0$.

Разделив обе части равенства для Δz на Δt , получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (2)$$

По условию, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$. Кроме того, так как функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t , то они непрерывны в этой точке, т. е. $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ и, как следствие, $\alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ и $\beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$. Поэтому слагаемые $\alpha(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\beta(\Delta x, \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$ стремятся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$.

Таким образом, доказано, что при $\Delta t \rightarrow 0$ существует предел правой части равенства (2), а следовательно, существует предел левой части

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt},$$

причем

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \frac{dy}{dt} \text{ или } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Обратите внимание на то, когда в обозначениях производных пишется « ∂ » и когда « d ».

Примеры.

1. Пусть $z = f(x, y)$, $x = t^3 + 2$, $y = 3t^4 - 1$. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y} 12t^3.$$

2. Пусть $z = x \sin \frac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1 + t^2}$. По формуле (1)

имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left(\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} \right) 3 - \frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y} \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

3. Пусть $z = x^2 y^3$, $x = t$, $y = t^2$. По формуле (1) получаем

$$\frac{dz}{dt} = 2xy^3 \cdot 1 + 3x^2 y^2 \cdot 2t.$$

Учитывая, что $x = t$, $y = t^2$, находим $\frac{dz}{dt} = 2t(t^2)^3 + 3t^2(t^2)^2 2t = 8t^7$. С другой стороны, можно найти $\frac{dz}{dt}$, выразив предварительно z через t . Имеем $z = x^2 y^3 = t^2 (t^2)^3 = t^8$, откуда $\frac{dz}{dt} = 8t^7$, что, безусловно, совпадает с результатом, полученным по формуле (1).

Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то $z = f[x, \varphi(x)]$ — сложная функция x . На основании формулы (1), в которой роль t играет теперь x , получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

а так как $\frac{dx}{dx} = 1$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

Аналогично решается вопрос о производной сложной функции, когда число промежуточных переменных больше двух. Например, если $u = f(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то формула (1) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных x и y , которые, в свою очередь, зависят от двух или большего числа независимых переменных. Например, пусть $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда функция $z = f[x(u, v), y(u, v)]$ является сложной функцией независимых переменных u и v , а переменные x и y — промежуточные.

Если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ дифференцируемы в точке $M'(u, v)$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то сложная функция $z = f[x(u, v), y(u, v)]$ дифференцируема в точке $M'(u, v)$, причем ее частные производные в этой точке находятся по формулам

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \quad (3)$$

Дифференцируемость сложной функции доказывать не будем. Для вычисления же ее частных производных фиксируем значение одной из переменных u или v . Тогда попадаем в условия только что доказанной теоремы 12. 4. Из формулы (1) в обоих случаях вытекают формулы (3).

Примеры.

1. Пусть $z=f(x, y)$, $x=u^2+2v$, $y=\frac{u^2}{v}$. По формулам (3) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} 2u + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{2u}{v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} 2 + \frac{\partial z}{\partial y} \left(-\frac{u^2}{v^2}\right)$$

2. Пусть $z=x^2y^2$, $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$. По формулам (3) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xy^2 \cdot 1 + 2x^2y \cdot \frac{1}{v}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2xy^2 \cdot 1 + 2x^2y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right).$$

Подставьте самостоятельно в эти формулы выражения $x=u+v$, $y=\frac{u}{v}$ и, с другой стороны, найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, предварительно выразив z через u и v , а затем сравните полученные результаты.

3. Пусть $z=x^2-y^2$, $x=u \cos v$, $y=u \sin v$. По формулам (3) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \cos v - 2y \sin v; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -2xu \sin v - 2yu \cos v.$$

Если $z=f(x)$, где $x=x(u, v)$, то $z=f[x(u, v)]$ — сложная функция, зависящая через переменную x от двух переменных u и v , и ее частные производные также находятся по формулам (3):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Обратите внимание на обозначения производных в этих формулах.

Формулы (3) можно обобщить на случай большего числа промежуточных переменных.

Например, если $w=f(x, y, z)$ — функция трех переменных x, y, z , а каждая из них зависит от u и v , то формулы (3) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

§ 4. Дифференциал функции

1. **Определение дифференциала.** Напомним, что если функция $z=f(M)$ дифференцируема в точке M , то ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (1)$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Определение. Дифференциалом dz дифференцируемой в точке M функции $z=f(M)$ называется линейная относительно приращений

Δx и Δy часть полного приращения этой функции в точке M , т. е.

$$dz = A \Delta x + B \Delta y. \quad (2)$$

Используя теорему 12.2, выражение (2) можно переписать следующим образом:

$$dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y.$$

Дифференциалами независимых переменных x и y назовем приращения этих переменных: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тогда дифференциал функции можно записать в виде

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy.$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что разность между полным приращением и дифференциалом функции в точке M

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

есть бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ более высокого порядка,

чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ [ρ — расстояние между точками $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$]. Действительно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho} \right) = 0,$$

так как α и β — бесконечно малые, а $\frac{\Delta x}{\rho}$ и $\frac{\Delta y}{\rho}$ — ограниченные функции: $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \leq 1$, $\left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1$. Отсюда получаем: $\Delta z - dz = o(\rho)$ или

$$\Delta z = dz + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right). \quad (3)$$

Отбрасывая при достаточно малых Δx и Δy величину $o(\rho)$, получаем приближенную формулу

$$\Delta z \approx dz,$$

которую широко используют в приближенных вычислениях, так как легче вычислить дифференциал, чем полное приращение.

2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Аналогично тому, как дифференциал функции одной переменной геометрически представляет собой приращение «ординаты касательной», дифференциал функции двух переменных есть приращение «аппликаты касательной плоскости». Введем понятие касательной плоскости к поверхности в точке N_0 .

Плоскость, проходящая через точку N_0 поверхности, называется касательной плоскостью к поверхности в этой точке, если угол между секущей (прямой), проходящей через точку N_0 и любую точку N поверхности, и плоскостью стремится к нулю, когда точка N стремится к точке N_0 .

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$ и функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Докажем, что касательная плоскость к поверхности в точке $N_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$, определяется уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (4)$$

Действительно, из аналитической геометрии известно, что уравнение (4) определяет плоскость, проходящую через точку $N_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = \{f'_x; f'_y; -1\}$. Чтобы установить, что эта плоскость является касательной, достаточно доказать, что угол φ между вектором $\vec{n}$ и вектором N_0N любой секущей N_0N стремится к $\pi/2$, когда точка N стремится к N_0 . Координаты точки N обозначим через $(x; y; z)$, где $z = f(x, y)$. Так как координаты вектора $\vec{n}$ равны $f'_x, f'_y, -1$, а координаты вектора N_0N равны $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, то

$$\cos \varphi = \frac{f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Но, как следует из соотношения (3), $f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) -$

$$-(z - z_0) = o(\rho), \text{ где } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \text{ Поэтому}$$

$$|\cos \varphi| \leq \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho} \rightarrow 0,$$

когда $\rho \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $\lim_{N \rightarrow N_0} \varphi = \pi/2$, что и требовалось доказать.

Нормальный вектор $\vec{n} = \{f'_x; f'_y; -1\}$ касательной плоскости называют *нормалью* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке N_0 . Пусть $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$; тогда из равенства (4) получаем, что приращение Δz «аппликаты касательной плоскости» определяется формулой

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y,$$

т. е. действительно совпадает с дифференциалом dz функции $z = f(x, y)$.

§ 5. Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию $z = f(M)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x; y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l} = \{\cos \alpha; \cos \beta\}$ (рис. 165).

Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x; y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпадало с направлением вектора $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Обозначим величину отрезка MM_1 через Δl , т. е. $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, если точка M_1 расположена так, как на рис. 165, и $\Delta l = -\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, если точка M_1 расположена по другую сто-

рону от точки M . Функция $f(M)$ получит при этом приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение 1. Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$ ($M_1 \rightarrow M$), если он существует, называется производной функции $z = f(M)$ в точке $M(x; y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т. е.

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Предположим теперь, что функция $f(M)$ дифференцируема в точке M . Тогда ее приращение в этой точке вдоль прямой L можно записать в виде

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta_1(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

где α_1 и β_1 — бесконечно малые функции при $\Delta l \rightarrow 0$. Разделив обе части равенства на Δl и учитывая, что $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \sin \alpha = \Delta l \cos \beta$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \cos \beta + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \cos \alpha + \beta_1(\Delta x, \Delta y) \cos \beta.$$

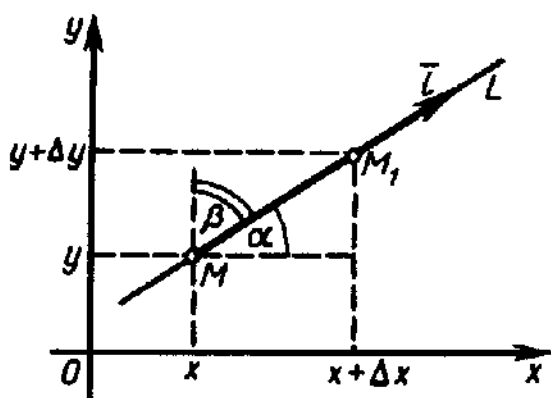


Рис. 165

Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l \rightarrow 0$, получаем формулу для производной по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что производная по направлению является линейной комбинацией частных производных, причем направляющие косинусы являются как бы весовыми множителями, показывающими вклад в производную по направлению соответствующей частной производной.

В частности, $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$ при $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$. Отсюда следует, что частные производные по x и y являются частными случаями производной по направлению.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке $M(1; 2)$ по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами $(3; 0)$.

Решение. Найдем единичный вектор $\vec{l}$, имеющий данное направление:

$$\begin{aligned} \overline{MM_1} &= \{2; -2\} = 2\vec{i} - 2\vec{j}; \quad |\overline{MM_1}| = 2\sqrt{2}; \quad \vec{l} = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \\ &= \frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}. \end{aligned}$$

откуда $\cos \alpha = 1/\sqrt{2}$, $\cos \beta = -1/\sqrt{2}$. Вычислим частные производные функции в точке $M(1; 2)$:

$f'_x(x, y) = 2x + y^2$, $f'_y(x, y) = 2xy$, откуда $f'_x(1; 2) = 6$, $f'_y(1; 2) = 4$.

По формуле (1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Определение 2. Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x; y)$.

Обозначение: $\text{grad } z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}$.

Используя понятие градиента функции и учитывая, что вектор $\overline{l}$ имеет координаты $\cos \alpha$, $\cos \beta$, представим формулу (1) в виде скалярного произведения векторов $\text{grad } z$ и $\overline{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \text{grad } z \cdot \overline{l}. \quad (2)$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения имеем

$$\text{grad } z \cdot \overline{l} = |\text{grad } z| \cdot |\overline{l}| \cos \varphi, \quad (3)$$

где $|\text{grad } z|$ — длина вектора $\text{grad } z$; φ — угол между векторами $\overline{l}$ и $\text{grad } z$. Сравнивая формулы (2) и (3) и учитывая, что $|\overline{l}| = 1$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z| \cos \varphi.$$

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению имеет наибольшую величину при $\cos \varphi = 1$ ($\varphi = 0$), т. е. когда направление вектора $\overline{l}$ совпадает с направлением $\text{grad } z$. При этом $\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z|$.

Таким образом, градиент функции $z = f(M)$ в точке $M(x; y)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Аналогично определяется производная по направлению для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, выводится формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

вводится понятие градиента

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

и исследуются его свойства.

Понятия производной по направлению и градиента функции играют важную роль во многих приложениях.

§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1. Частные производные высших порядков. Пусть частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(M)$, определенной в окрестности точки M , существуют в каждой точке этой окрестности. В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных x и y , определенные в указанной окрестности точки M . Назовем их *частными производными первого порядка*.

В свою очередь, частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке M , если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $f(M)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{xx}(x, y) = f^{(2)}_{x^2}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = f^{(2)}_{yx}(x, y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''_{yy}(x, y) = f^{(2)}_{y^2}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = f^{(2)}_{xy}(x, y).\end{aligned}$$

Частные производные второго порядка вида $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ называются *смешанными частными производными*.

Примеры:

1. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

2. $z = \sin x \cos y$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\cos x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

В обоих примерах смешанные частные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ равны. Но, вообще говоря, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производится дифференцирование. Так, например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $(0; 0)$ имеет смешанные частные производные $f''_{yx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$, но они не равны друг другу. Действительно,

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0 + \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = -1.$$

Проводя аналогичные вычисления, получим $f''_{xy}(0, 0) = 1$. Таким образом, $f''_{yx}(0, 0) \neq f''_{xy}(0, 0)$.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях значения смешанных производных не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование, дает следующая теорема.

Теорема 12.5. Если производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ существуют в некоторой δ -окрестности точки $M(x, y)$ и непрерывны в самой точке M , то они равны между собой в этой точке, т. е. имеет место равенство

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)],$$

где Δx и Δy — любые столь малые числа, что точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ находится в указанной δ -окрестности точки M .

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y);$$

тогда выражение A можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[x, x + \Delta x]$ функции $\varphi(x)$ одной переменной x :

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Поэтому, применяя к этой разности теорему Лагранжа, запишем

$$\begin{aligned} A &= \Delta\varphi = \varphi'(x + \theta_1 \Delta x) \Delta x = \\ &= [f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y)] \Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[y, y + \Delta y]$ функции $f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y)$ одной переменной y . Применяя еще раз теорему Лагранжа (по переменной y), получаем

$$A = f''_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_1, \quad \theta_2 < 1. \quad (1)$$

С другой стороны, если ввести вспомогательную функцию

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

то, поступая аналогично, получим

$$A = \Delta\psi = \psi(y + \Delta y) - \psi(y),$$

а затем

$$A = f''_{xy}(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \Delta y \Delta x, \quad 0 < \theta_3, \theta_4 < 1. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$f''_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = f''_{xy}(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y).$$

Переходя теперь в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность частных производных $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ в точке M , получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \text{ или} \\ f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y). \blacksquare$$

Аналогично частным производным второго порядка вводятся частные производные третьего, четвертого, ..., n -го порядка и доказывается теорема типа 12.5 о равенстве смешанных производных любого порядка.

2. Дифференциалы высших порядков. В § 4 было введено понятие дифференциала дифференцируемой в точке M функции $z = f(M)$ и получена формула

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy. \quad (3)$$

Будем называть dz *дифференциалом первого порядка*. Для удобства условимся обозначать дифференциалы не только символом d , но и символом δ (например, δx , δy).

Пусть функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ дифференцируемы в точке M . Будем рассматривать dx и dy в выражении для dz как постоянные множители. Тогда функция dz представляет собой функцию только переменных x и y , дифференцируемую в точке M , и ее дифференциал имеет вид

$$\delta(dz) = \delta[f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy] = \\ = [f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy]'_x \delta x + [f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy]'_y \delta y. \quad (4)$$

Дифференциал $\delta(dz)$ от дифференциала dz в точке M , взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется *дифференциалом второго порядка* функции $z = f(M)$ в точке M и обозначается d^2z . В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2z)$ от d^2z , взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется *дифференциалом третьего порядка* функции $z = f(M)$ и обозначается d^3z и т. д. Дифференциал $\delta(d^{n-1}z)$ от дифференциала $d^{n-1}z$, взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется *дифференциалом n -го порядка (или n -м дифференциалом) функции $z = f(M)$* и обозначается $d^n z$.

Итак, для n -го дифференциала функции $z = f(M)$ справедлива формула

$$d^n z = \delta(d^{n-1}z) \Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$$

При нахождении второго (и последующих) дифференциалов обычно вычисление $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов ($\delta x = dx$, $\delta y = dy$) производятся одновременно.

С помощью формулы (4) найдем выражение для дифференциала второго порядка:

$$d^2z = \delta(dz) \Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy = \\ = f''_{xx}(dx)^2 + f''_{xy} dx dy + f''_{yx} dy dx + f''_{yy}(dy)^2.$$

Если f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то согласно теореме 12.5 слагаемые $f''_{xy} dx dy$ и $f''_{yx} dy dx$ равны, так что

$$d^2z = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy}(dy)^2.$$

Аналогично,

$$d^3z = f'''_{x^3}(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2} dx (dy)^2 + f'''_{y^3}(dy)^3,$$

$$\dots$$

$$d^n z = f^{(n)}_{x^n}(dx)^n + n f^{(n)}_{x^{n-1}y}(dx)^{n-1} dy + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} f^{(n)}_{x^{n-k}y^k}(dx)^{n-k}(dy)^k + \dots + f^{(n)}_{y^n}(dy)^n.$$

Формула для $d^n z$ напоминает разложение двучлена в n -й степени по формуле Ньютона. Поэтому выражение для $d^n z$ символически можно записать в виде, более удобном для запоминания:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y).$$

Примеры.

1. Найти $d^2 z$ для функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Имеем

$$f'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}, f'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2}, f''_{xy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = f''_{yx},$$

$$f''_{x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, f''_{y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Следовательно,

$$d^2 z = \frac{-2xy(dx)^2 + 2(x^2 - y^2) dx dy + 2xy(dy)^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2. Найти $d^3 z$ для функции $z = \sin x \cos y$. Имеем

$$f'_x = \cos x \cos y, f'_y = -\sin x \sin y, f''_{x^2} = -\sin x \cos y,$$

$$f''_{y^2} = -\sin x \cos y, f''_{xy} = -\cos x \sin y,$$

$$f'''_{x^3} = -\cos x \cos y, f'''_{y^3} = \sin x \sin y,$$

$$f'''_{x^2y} = \sin x \sin y, f'''_{xy^2} = -\cos x \cos y.$$

Следовательно,

$$d^3 z = -\cos x \cos y (dx)^3 + 3 \sin x \sin y (dx)^2 dy -$$

$$- 3 \cos x \cos y dx (dy)^2 + \sin x \sin y (dy)^3.$$

§ 7. Формула Тейлора для функции двух переменных

Аналогично функции одной переменной функцию двух переменных можно представить в виде суммы многочлена n -й степени и некоторого остаточного члена. Докажем следующую теорему.

Теорема 12.6. Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна вместе со всеми частными производными до $(n+1)$ -го порядка включительно в некоторой δ -окрестности точки $M(x, y)$. Пусть точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности. Тогда приращение $\Delta f = f(M_1) - f(M)$ этой функции в точке M можно

представить в следующей форме:

$$\Delta f = df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x, y)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Тейлора* для функции $z = f(x, y)$.

Доказательство. Для доказательства введем вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x + t \Delta x, y + t \Delta y),$$

которая является сложной функцией независимой переменной t , изменяющейся в пределах от 0 до 1, и имеет $(n+1)$ -ю производную по t на отрезке $[0; 1]$.

Дифференцируя функцию $F(t)$ по t , получаем

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'_x(x + t \Delta x, y + t \Delta y) \Delta x + f'_y(x + t \Delta x, y + t \Delta y) \Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f(x + t \Delta x, y + t \Delta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= f''_{xx}(x + t \Delta x, y + t \Delta y) (\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x + t \Delta x, y + t \Delta y) \Delta x \Delta y + \\ &+ f''_{yy}(x + t \Delta x, y + t \Delta y) (\Delta y)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x + t \Delta x, y + t \Delta y). \end{aligned}$$

По индукции найдем

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x + t \Delta x, y + t \Delta y),$$

$$F^{(n+1)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x + t \Delta x, y + t \Delta y).$$

С другой стороны, применяя к функции $F(t)$, как функции одной переменной t , формулу Маклорена (см. гл. 6, § 3, п. 3) и полагая $t=1$, получаем

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (2)$$

Но

$$F(1) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(M_1),$$

$$F(0) = f(x, y) = f(M),$$

$$F'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f(x, y) = df(x, y),$$

$$F''(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x, y) = d^2 f(x, y),$$

.....

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x, y) = d^n f(x, y),$$

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\theta) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) = \\ &= d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y). \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства, из формулы (2) имеем

$$F(1) - F(0) = f(M_1) - f(M) = \Delta f = df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x, y)}{n!} + \\ + \frac{d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

т. е. получена формула (1). ■

Формула Тейлора для функции двух переменных напоминает формулу Тейлора для функции одной переменной. Но на самом деле, если раскрыть выражения для дифференциалов функции $f(x, y)$ в формуле (1), то получим формулу более громоздкую и сложную, чем для функции одной переменной.

Формула Тейлора для функций большего числа переменных имеет аналогичный вид.

З а м е ч а н и е. При $n=0$ из (1) получается формула Лагранжа (или формула конечных приращений) для функции двух переменных

$$\Delta f = df(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) = \\ = f'_x(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta x + f'_y(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) \Delta y, \quad 0 < \theta < 1,$$

из которой, в частности, следует, что если $f'_x = f'_y \equiv 0$, то полное приращение функции тождественно равно нулю и функция $f(x, y)$ является постоянной.

§ 8. Экстремумы функции двух переменных

1. Определение экстремума. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Определение. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0 , в которой для любой точки $M(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются **точками экстремума**. Из определения следует, что если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0 , то полное приращение $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ этой функции в точке M_0 удовлетворяет в некоторой окрестности точки M_0 одному из следующих условий:

$$\Delta z \leq 0 \quad (\text{в случае локального максимума}), \\ \Delta z \geq 0 \quad (\text{в случае локального минимума}).$$

И обратно, если в некоторой окрестности точки M_0 выполняется одно из этих неравенств, то функция имеет экстремум в точке M_0 .

2. Необходимые условия экстремума. Теорема 12.7. Если функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0 частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т. е.

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (1)$$

Доказательство. Докажем, например, равенство нулю частной производной $f'_x(x_0, y_0)$. Для этого рассмотрим в окрестности точки M_0 только те точки, для которых $y = y_0$. Получена функция $f(x, y_0)$ одной переменной x , которая имеет в точке $x = x_0$ экстремум и в точке $x = x_0$ производную $f'_x(x_0, y_0)$. Следовательно, в этой точке выполняется необходимое условие экстремума функции одной переменной: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично, рассматривая функцию $f(x_0, y)$ одной переменной y , находим $f'_y(x_0, y_0) = 0$. ■

Условие (1) не является достаточным условием экстремума. Например, частные производные функций $z = x^2 - y^2$ равны нулю в точке $(0; 0)$, однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке, так как равна в ней нулю и ни в какой окрестности точки $(0; 0)$ не сохраняет знак: если $x = 0$, то $z < 0$, а если $y = 0$, то $z > 0$. Графиком функции $z = x^2 - y^2$ является гиперболический параболоид (см. рис. 160).

Таким образом, условие (1) является только необходимым условием экстремума. Точки, в которых оно выполняется, будем по аналогии с функциями одной переменной называть *точками возможного экстремума*. Такие точки называются также *стационарными*.

3. Достаточные условия экстремума. Теорема 12.8. Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ возможного экстремума и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ — локальный максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ — локальный минимум;

б) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума.

Доказательство. а) Пусть $\Delta > 0$. Введем следующие обозначения: $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$ и $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. По условию, $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, $A > 0$ (или $A < 0$). Согласно формуле Тейлора (1) из § 7, взятой для $n = 1$, полное приращение функции $f(x, y)$ в точке M_0 можно записать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{2!} [A' (\Delta x)^2 + 2B' \Delta x \Delta y + C' (\Delta y)^2], \quad (1)$$

где $A' = f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$, $B' = f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$, $C' = f''_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$, $0 < \theta < 1$. Из непрерывности частных производных второго порядка в точке M_0 следует:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} A' = f''_{xx}(x_0, y_0) = A > 0 \text{ (или } A < 0),$$

а также

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A'C' - B'^2) = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = \Delta > 0.$$

Поэтому для достаточно малых Δy и Δx имеем

$$A' > 0 \text{ (или } A' < 0), A'C' - B'^2 = \Delta' > 0.$$

Так как $A' \neq 0$, то соотношение (1) можно переписать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{A'} [A'^2 (\Delta x)^2 + 2A'B' \Delta x \Delta y + A'C' (\Delta y)^2],$$

или, дополняя до полного квадрата,

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \frac{1}{A'} [(A' \Delta x + B' \Delta y)^2 + (A'C' - B'^2) (\Delta y)^2].$$

Выражение в квадратных скобках неотрицательно, поэтому если $A' > 0$ ($f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$), то $\Delta f \geq 0$, и, следовательно, в точке M_0 локальный минимум; если же $A' < 0$ ($f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$), то $\Delta f \leq 0$, и, следовательно, в точке M_0 локальный максимум, что и требовалось доказать.

б) Пусть теперь $\Delta = AC - B^2 < 0$ и по-прежнему $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Рассмотрим многочлен

$$A + 2Bx + Cx^2.$$

Так как $B^2 - AC > 0$, то можно указать два числа x_1 и x_2 такие, что

$$A + 2Bx_1 + Cx_1^2 > 0, A + 2Bx_2 + Cx_2^2 < 0.$$

Полное приращение функции $f(x, y)$ в точке M_0 , как и в п. а), запишем в виде (1). В силу непрерывности частных производных второго порядка

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A' + 2B'x_1 + C'x_1^2) = A + 2Bx_1 + Cx_1^2 > 0.$$

Следовательно, существует δ -окрестность точки M_0 такая, что если точка $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности, то

$$A' + 2B'x_1 + C'x_1^2 > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь произвольную δ' -окрестность точки M_0 такую, что $\delta' \leq \delta$. Можно выбрать число $t > 0$ столь малым, что точка $M_1(x + t; y + tx_1)$ будет принадлежать δ' -окрестности точки M_0 . Полагая в (1) $\Delta x = t$, $\Delta y = tx_1$, в силу (2) получаем

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} t^2 [A' + 2B'x_1 + C'x_1^2] > 0.$$

Рассуждая аналогично относительно значения x_2 , получим, что в произвольной δ' -окрестности точки M_0 существует точка $M_2(x + \Delta x; y + \Delta y)$, для которой

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0,$$

т. е. приращение функции $f(x, y)$ в сколь угодно малой окрестности точки M_0 не сохраняет знак и, следовательно, в точке M_0 нет экстремума. ■

З а м е ч а н и е. Если $\Delta=0$, то функция $f(x, y)$ в точке M_0 возможного экстремума может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Примеры.

1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$. Имеем

$$f'_x = 2x + y - 2, \quad f'_y = x + 2y - 3.$$

Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

решения которой $x=1/3$, $y=4/3$. Следовательно, $M_0(1/3; 4/3)$ — точка возможного экстремума.

Далее, $f''_{xx}=2$, $f''_{xy}=1$, $f''_{yy}=2$, $\Delta=2 \cdot 2 - 1 = 3$. Так как $\Delta=3>0$ и $f''_{xx}=2>0$, то в точке $M_0(1/3; 4/3)$ данная функция имеет минимум.

2. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-y^2$. Имеем $f'_x=2x$, $f'_y=-2y$. Решая систему уравнений $2x=0$, $-2y=0$, получаем, что $M_0(0; 0)$ — точка возможного экстремума. Так как $f''_{xx}=2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=-2$ и, следовательно, $\Delta=2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$, то в точке $M_0(0; 0)$ экстремума нет.

3. Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+y^4$. Имеем $f'_x=4x^3$, $f'_y=4y^3$, $f''_{xx}=12x^2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=12y^2$. Решая систему уравнений $4x^3=0$, $4y^3=0$, находим, что $M_0(0; 0)$ — точка возможного экстремума. В этой точке $f''_{xx}(0, 0)=0$, $f''_{yy}(0, 0)=0$ и, следовательно, $\Delta=0$. Согласно замечанию в точке $M_0(0; 0)$ экстремум может быть и может не быть. В данном случае экстремум есть, так как $z>0$ во всех точках, кроме M_0 и $z=0$ в точке M_0 , т. е. данная функция в точке M_0 имеет минимум.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3$. Имеем $f'_x=3x^2$, $f'_y=3y^2$, $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=6y$. Решая систему уравнений $3x^2=0$, $3y^2=0$, находим, что $M_0(0; 0)$ — точка возможного экстремума. В этой точке $f''_{xx}(0, 0)=0$, $f''_{yy}(0, 0)=0$ и, следовательно, $\Delta=0$. В данном случае в точке M_0 экстремума нет. В самом деле, $z(0, 0)=0$, $z(x, 0)=x^3$, откуда $z>0$ при $x>0$ и $z<0$ при $x<0$, т. е. в любой окрестности точки M_0 данная функция имеет значения как большие, так и меньшие $z(0, 0)$.

§ 9. Метод наименьших квадратов

В различных исследованиях приходится использовать формулы, составленные на основании эксперимента. Одним из лучших способов получения таких формул является *метод наименьших квадратов*.

Пусть на основании эксперимента необходимо установить функциональную зависимость между двумя переменными величинами

x и y . Например, между температурой и удлинением прямолинейного металлического стержня. По результатам измерений составим следующую таблицу:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Установим теперь вид функции $y=f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек. Пусть, например, точки, взятые из таблицы, расположены так, как показано на рис. 166. В данном случае естественно предположить, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой

$$y = ax + b. \quad (1)$$

Ограничимся только случаем линейной зависимости.

Так как точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ не лежат точно на прямой, а лишь вблизи нее, то формула (1) является приближенной. Поэтому, подставляя значения координат точек в выражение $y = (ax + b)$, получаем равенства

$$y_1 - (ax_1 + b) = \delta_1, y_2 - (ax_2 + b) = \delta_2, \dots, y_n - (ax_n + b) = \delta_n,$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — некоторые числа, которые назовем погрешностями.

Поставим задачу подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы эти погрешности были возможно меньше по абсолютной величине. Для решения этой задачи воспользуемся методом наименьших квадратов. Рассмотрим сумму квадратов погрешностей

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Здесь x_i и y_i — заданные числа, а коэффициенты a и b — неизвестные числа, подлежащие определению, исходя из условия минимума $S(a, b)$, т. е. $S(a, b)$ можно рассматривать как функцию двух переменных a и b и исследовать ее на экстремум.

Таким образом, задача свелась к нахождению значений a и b , при которых функция $S(a, b)$ имеет минимум. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)].$$

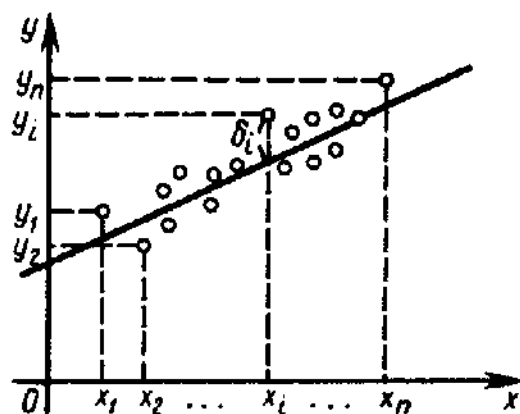


Рис. 166

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i x_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + bn. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) называется *нормальной системой метода наименьших квадратов*. Из этой системы находим числа a и b и затем, подставляя их в уравнение (1), получаем уравнение искомой прямой.

Тот факт, что функция $S(a, b)$ в найденной точке $M(a; b)$ имеет минимум, легко устанавливается с помощью частных производных второго порядка. Имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Следовательно,

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

Это выражение можно записать в виде $\Delta = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$,

откуда следует, что $\Delta > 0$. Так как $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$, то в точке $M(a; b)$ функция $S(a, b)$ имеет минимум.

Пример. Пусть в результате эксперимента получены пять значений искомой функции y при пяти значениях аргумента

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Будем искать функциональную зависимость между x и y в виде линейной функции $y = ax + b$.

При составлении нормальной системы (2) для определения коэффициентов a и b предварительно вычислим:

$$\sum_{i=1}^5 y_i x_i = 16,5; \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 25; \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 5; \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 8.$$

Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16,5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем: $a = 0,425$, $b = 1,175$. Следовательно, $y = 0,425x + 1,175$ — уравнение искомой прямой.

В данной главе рассмотрим основные вопросы интегрирования функций двух переменных. Полученные определения и результаты могут быть перенесены на функции трех и более переменных.

§ 1. Двойные интегралы

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функций двух переменных.

1. Определение и условия существования двойного интеграла. Пусть G — некоторая замкнутая ограниченная область, а $z = f(x, y)$ — произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области.

Предполагается, что граница области G состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — непрерывные функции. Такой областью, например, является замкнутый многоугольник, граница которого состоит из конечного числа отрезков, представляющих собой графики непрерывных функций вида $y = kx + b$ или $x = a$. Другой пример — область, ограниченная эллипсом (здесь граница состоит из двух кривых: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$) и т. д.

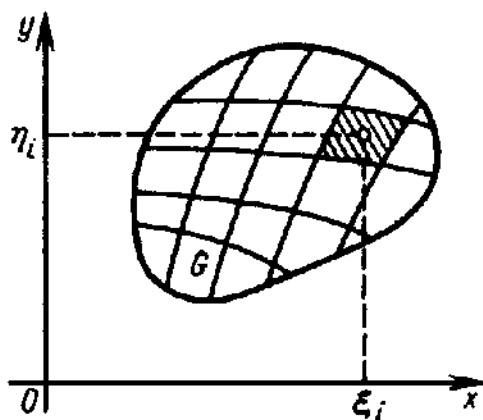


Рис. 167

Разобьем область G произвольно на n частей G_i , не имеющих общих внутренних точек, с площадями Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (рис. 167). В каждой части G_i выберем произвольную точку (ξ_i, η_i) и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad (1)$$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области G . Назовем *диаметром* $d(G)$ области G наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим через λ наибольший из диаметров частичных областей G_i ($\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(G_i)\}$).

Определение. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I^* , то этот предел называется *двойным интегралом*.

* Число I называется пределом интегральной суммы (1) при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ независимо от выбора точек (ξ_i, η_i) выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

лом от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_G f(x, y) ds = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области G , G — *областью интегрирования*, x и y — *переменными интегрирования*, ds (или $dx dy$) — *элементом площади*.

Давая определение двойного интеграла, мы предполагаем, что функция $f(x, y)$ ограничена. Как и для функции одной переменной, это условие является необходимым условием интегрируемости. Однако оно не является достаточным, т. е. существуют ограниченные, но не интегрируемые функции. Примером таких функций является функция, определенная на квадрате $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ рациональные числа,} \\ 0, & \text{если } x \text{ или } y \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Доказательство неинтегрируемости такой функции непосредственно следует из определения двойного интеграла.

Для нахождения достаточных условий интегрируемости, как и в случае одной переменной, удобно воспользоваться теорией сумм Дарбу, которая полностью переносится на случай двойного интеграла*. Аналогично доказательству соответствующей теоремы для определенного интеграла доказывается следующая теорема.

Теорема 13.1. *Функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области G , интегрируема в этой области.*

Однако не следует считать, что двойной интеграл существует только для непрерывных функций. Имеет место более общая теорема.

Теорема 13.2. *Функция $f(x, y)$, ограниченная в замкнутой ограниченной области G и непрерывная в ней всюду, кроме точек, лежащих на конечном числе кривых, являющихся графиками непрерывных функций вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, интегрируема в этой области.*

2. Геометрический смысл двойного интеграла. Пусть в пространстве дано тело P (рис. 168), ограниченное сверху графиком непрерывной и неотрицательной функции $z = f(x, y)$, которая определена в области G , с боков — цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G , а образующие параллельны оси Oz , и снизу областью G , лежащей в плоскости Oxy . Тело такого вида называют *криволинейным цилиндром*.

Аналогично тому как задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к установлению геометрического смысла

* В частности, можно доказать, что если функция $f(x, y)$ интегрируема в области G , то предел как нижних, так и верхних сумм Дарбу при $\lambda \rightarrow 0$ равен $\iint_G f(x, y) ds$.

определенного интеграла, так и задача о вычислении объема тела P приводит к геометрическому толкованию двойного интеграла.

Действительно, в данном случае интегральная сумма (1) представляет собой сумму объемов прямых цилиндров с площадями оснований Δs_i и высотами $f(\xi_i, \eta_i)$, которую можно принять за приближенное значение объема тела P :

$$v_P \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем мельче разбиение области G на части. При переходе к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ это приближенное равенство становится точным:

$$v_P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема, то предел интегральной суммы существует и равен двойному интегралу от этой функции по области G . Следовательно,

$$v_P = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

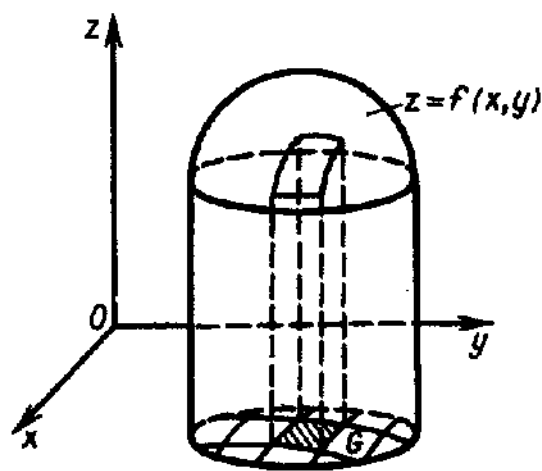


Рис. 168

Отсюда следует геометрический смысл двойного интеграла: *двойной интеграл от непрерывной, неотрицательной функции равен объему криволинейного цилиндра.*

З а м е ч а н и е. Если положить $f(x, y) \equiv 1$ всюду в области G , то непосредственно из определения двойного интеграла получим выражение площади s области G в виде двойного интеграла:

$$\iint_G 1 \cdot dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = s.$$

3. Свойства двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Поэтому ограничимся формулировкой этих свойств, не останавливаясь на доказательствах.

1°. Если k — произвольное число и функция $f(x, y)$ интегрируема в области G , то функция $kf(x, y)$ тоже интегрируема в G и

$$\iint_G kf(x, y) dx dy = k \iint_G f(x, y) dx dy,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2°. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области G , то их алгебраическая сумма также интегрируема в этой области и

$$\iint_G [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy \pm \iint_G g(x, y) dx dy.$$

3°. Если область G является объединением областей G_1 и G_2 , не имеющих общих внутренних точек, в каждой из которых функция $f(x, y)$ интегрируема, то в области G эта функция также интегрируема и

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy.$$

4°. Теорема о среднем. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области G , то в этой области найдется такая точка $(\xi; \eta)$, что

$$\iint_G f(x, y) dx dy = f(\xi; \eta) s,$$

где s — площадь фигуры G .

Итак, рассмотрены определение и основные свойства двойного интеграла, условия существования, выяснен его геометрический смысл. Теперь рассмотрим способы вычисления двойных интегралов.

§ 2. Сведение двойного интеграла к повторному

1. Случай прямоугольной области. Сначала рассмотрим двойной интеграл по некоторому прямоугольнику D со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 13.3. Пусть для функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $D = \{(x; y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ существует двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Пусть, далее, для каждого x из отрезка $[a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2)$$

Тогда существует интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (3)$$

Доказательство. Разобьем прямоугольник D с помощью точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_k = d$ на nk частичных прямоугольников $D_{ij} = \{(x; y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$. Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ и обозначим через m_{ij} и M_{ij} соответственно точную нижнюю и верхнюю грани функции $f(x, y)$ на частичном прямоуголь-

нике D_{ij} (рис. 169). Тогда всюду на этом прямоугольнике

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}. \quad (4)$$

Положим в этом неравенстве $x = \xi_i$, где ξ_i — произвольная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ и затем проинтегрируем (4) по y в пределах от y_{j-1} до y_j . Получим

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j. \quad (5)$$

Суммируя (5) по всем j от 1 до k и используя обозначение (2) имеем

$$\sum_{j=1}^k m_{ij} \Delta y_j \leq I(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^k M_{ij} \Delta y_j. \quad (6)$$

Далее, умножая (6) на Δx_i и суммируя по всем i от 1 до n , получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j. \quad (7)$$

Пусть наибольший диаметр частичных прямоугольников D_{ij} стремится к нулю ($\lambda \rightarrow 0$). Тогда и наибольшая из длин $\Delta x_i \rightarrow 0$. Крайние члены в (7), представляющие собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, стремятся при этом к двойному интегралу (1) (см. сноску на с. 308). Таким образом, существует предел и среднего члена (7), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению определенного интеграла равен

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Тем самым доказано существование повторного интеграла и равенство (3). ■

З а м е ч а н и е. Если в теореме 13.3 поменять x и y ролями, то будет доказано существование повторного интеграла

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

и справедливость равенства

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (8)$$

С помощью формул (3) и (8) двойной интеграл приводится к повторному. Например, в формуле (8) интегрирование сначала произ-

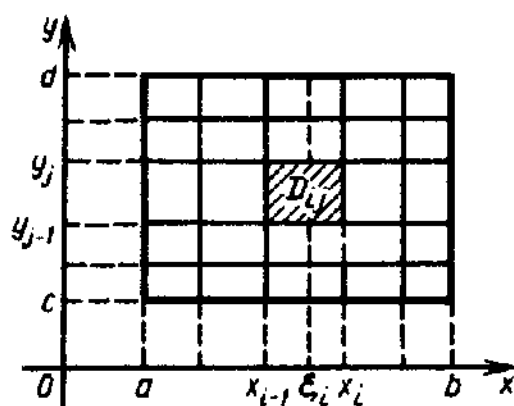


Рис. 169

водится по x при постоянном y , а затем полученный результат интегрируется по y , т. е. последовательно вычисляются два определенных интеграла.

Пример. Вычислить $\iint_D xy \, dx \, dy$, где $D = \{(x; y) | 1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_1^2 dy \int_1^2 xy \, dx = \\ &= \int_1^2 \left[y \frac{x^2}{2} \right]_1^2 dy = \int_1^2 \left[2y - \frac{1}{2}y \right] dy = \frac{3}{4} y^2 \Big|_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

2. Случай криволинейной области. Теорема 13.4. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции, $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $a \leq x \leq b$. Пусть также существует двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$$

и для каждого x из отрезка $[a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x) \, dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy$$

и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy. \quad (9)$$

Доказательство. Положим $c = \min_{[a, b]} y_1(x)$, $d = \max_{[a, b]} y_2(x)$ и заключим область G в прямоугольник $D = \{(x; y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ (рис. 170). Рассмотрим в этом прямоугольнике вспомогательную функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{в точках области } G, \\ 0 & \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Действительно, она интегрируема в области G , так как совпадает в ней с $f(x, y)$, и интегрируема в остальной части $D - G$ прямоугольника D , где она равна нулю. Следовательно, согласно свойству 3°

§ 1, она интегрируема и по всему прямоугольнику D . При этом

$$\iint_G F(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy \text{ и } \iint_{D-G} F(x, y) dx dy = 0,$$

откуда

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Далее, для каждого x из $[a, b]$ существует интеграл

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^{y_1(x)} F(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x, y) dy,$$

так как существует каждый из трех интегралов, стоящих справа. Действительно, отрезки $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ лежат вне области G и на них $F(x, y)$ равна нулю, отсюда первый и третий интегралы

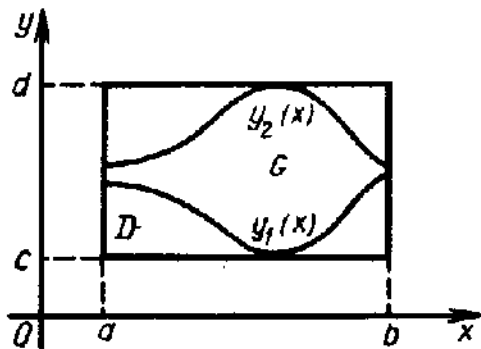


Рис. 170

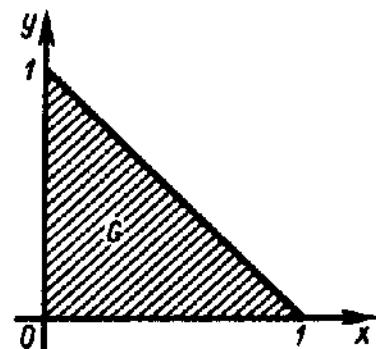


Рис. 171

равны нулю, а второй интеграл существует по условию, так как $F(x, y) = f(x, y)$ на отрезке $[y_1(x), y_2(x)]$. Поэтому

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (11)$$

Таким образом, для функции $F(x, y)$ выполнены все условия теоремы 13.3 и, следовательно, двойной интеграл от этой функции по прямоугольнику D может быть сведен к повторному

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Отсюда и из равенств (10) и (11) получаем

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

т. е. формулу (9). ■

З а м е ч а н и е 1. Если в теореме 13.4 поменять ролями x и y , то теорема будет утверждать существование повторного интеграла

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

и равенства

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (12)$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_G (x^2 + xy + 2y^2) dx dy$ по области $G = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

Решение. Область G представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и прямой $y = -x + 1$ (рис. 171). Следовательно, $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 1 - x$. По формуле (9) имеем

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + xy + 2y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 2y^2) dy = \\ &= \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{2} + \frac{2(1-x)^3}{3} \right] dx = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

Данный интеграл можно вычислить и по формуле (12), если в G поменять x и y ролями. Тогда треугольник определяется неравенствами $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1 - y$, откуда $x_1(y) = 0$, $x_2(y) =$

$$\begin{aligned} &= 1 - y, \text{ и легко проверить, что интеграл } \iint_G (x^2 + xy + 2y^2) dx dy = \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 + xy + 2y^2) dx \text{ имеет то же самое значение.} \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Если область G не удовлетворяет условиям теоремы 13.4 (например, прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо область G разбить на части, каждая из которых удовлетворяла бы условиям теоремы 13.4, и сводить к повторному каждый из соответствующих двойных интегралов отдельно.

§ 3. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области G . Тогда для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Предположим, далее, что с помощью формул

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (2)$$

мы переходим к новым переменным u и v . Будем считать, что u и v определяются из (2) единственным образом:

$$u = u(x, y), v = v(x, y). \quad (3)$$

С помощью формул (3) каждой точке $M(x; y)$ из области G ставится в соответствие некоторая точка $M^*(u; v)$ на координатной

плоскости с прямоугольными координатами u и v . Пусть множество всех точек $M^*(u, v)$ образует ограниченную замкнутую область G^* . Формулы (2) называют *формулами преобразования координат*, а формулы (3) — *формулами обратного преобразования*.

При сделанных предположениях можно доказать, что если функции (2) имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и если определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (4)$$

отличен в G^* от нуля, то для интеграла (1) справедлива формула замены переменных

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (5)$$

Определитель (4) называется *функциональным определителем* или *якобианом* (по имени немецкого математика Якоби) функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ по переменным u и v .

Коротко изложенное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 13.5. Если преобразование (2) переводит замкнутую ограниченную область G в замкнутую ограниченную область G^* и является взаимно однозначным и если функции (2) имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан (4), а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G , то справедлива формула замены переменных (5).

Доказательство теоремы достаточно сложное и здесь не приводится*.

Как в двойном, так и в определенном интеграле замена переменных — важнейший способ приведения интеграла к виду, более удобному для вычисления.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_G (2x - y) dx dy$, где G — параллелограмм, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$ (рис. 172, а).

Решение. Непосредственное вычисление этого интеграла достаточно громоздкое, так как для сведения его к повторному (сначала по y , а затем по x) необходимо область G разбить на три области (штриховые линии на рис. 172) и затем вычислить соответственно три интеграла. Однако простая замена переменных

$$x + y = u, \quad 2x - y = v \quad (6)$$

позволяет значительно упростить решение. Прямые $x + y = 1$ и $x + y = 2$ в системе координат Oxy переходят в прямые $u = 1$

* Отметим также, что формула (5) справедлива и в более общем случае, в частности якобиан (4) может обращаться в нуль в конечном числе точек или кривых.

и $u=2$ в системе координат $O'uv$ (рис. 172, б), а прямые $2x-y=1$ и $2x-u=3$ — в прямые $v=1$ и $v=3$. Параллелограмм G взаимно однозначно преобразуется в прямоугольник G^* , который является более простой областью интегрирования. Осталось вычислить якобиан. Для этого выразим x и y через u и v из равенств (6): $x=(u+v)/3$, $y=(2u-v)/3$. Следовательно,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}.$$

По формуле (5) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \iint_G (2x-y) dx dy &= \iint_{G^*} \frac{1}{3} v du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^3 v dv = \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 \left[\frac{v^2}{2} \right]_1^3 du = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) \int_1^2 du = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержат сумму x^2+y^2 , то во многих случаях упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$) принимает достаточно простой вид $(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = \rho^2$.

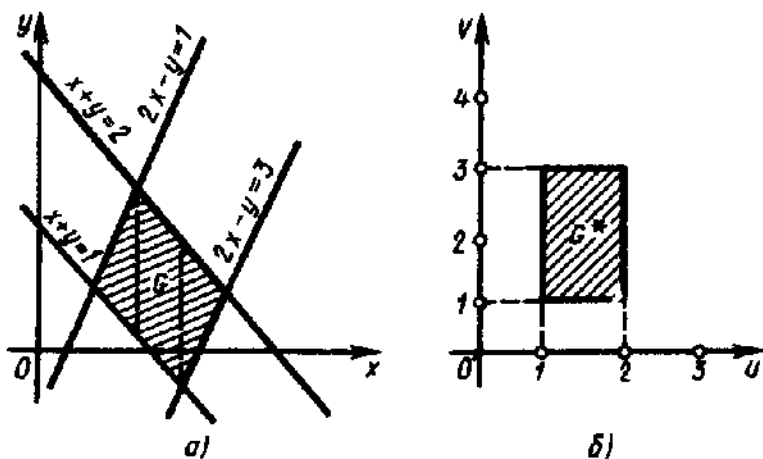


Рис. 172

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_G e^{x^2+y^2} dx dy$, где G — четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте (рис. 173).

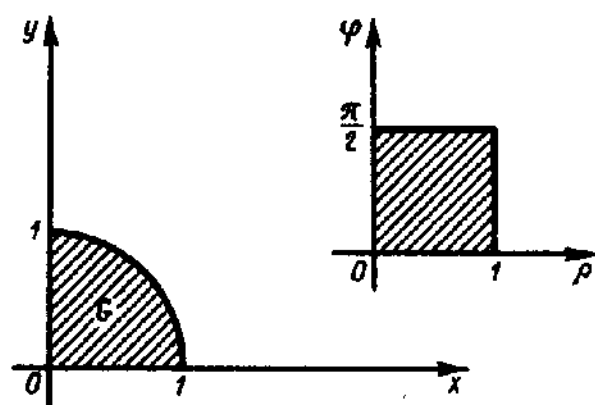


Рис. 173

Р е ш е н и е. Преобразуем интеграл к полярным координатам по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда $x^2+y^2 = \rho^2$ и

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \rho [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] = \rho. \end{aligned}$$

Наглядно видно, что в области G ρ изменяется в пределах от 0 до 1, а φ — от 0 до $\pi/2$. Иначе говоря, область G преобразуется

в прямоугольник $\{(r; \varphi) | 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}^*$ (рис. 173). Таким образом, по формуле (5) получаем

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{2}(e-1) \int_0^{\pi/2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(e-1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e-1). \end{aligned}$$

На практике при замене переменных нет необходимости детально строить область G^* . Обычно выясняют пределы изменения новых координат, используя вид области G на плоскости Oxy , что и сделано вначале в данном примере.

§ 4. Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов

1. Вычисление объема. Как известно, объем v криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y) > 0$, снизу плоскостью $z=0$ и с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz , а направляющей служит контур области G , вычисляется по формуле

$$v = \iint_G f(x, y) dx dy,$$

т. е. с помощью двойных интегралов можно вычислять объемы тел.

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$ (рис. 174).

Решение. Имеем

$$v = \iint_G (1-x-y) dx dy,$$

где G — треугольная область интегрирования, ограниченная прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} v &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. Вычисление площади. Как было установлено (см. замечание в § 1), площадь s области G может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$s = \iint_G dx dy.$$

* Якобиан обращается в нуль при $\rho=0$, но формула замены переменных остается в силе.

Эта формула более универсальна, чем соответствующая формула, выражающая площадь криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла, так как данная формула применима не только к криволинейным трапециям, но и к фигурам, расположенным произвольно по отношению к координатным осям.

Пример 2. Вычислить площадь области G , ограниченной линиями $y^2 = x + 1$, $x + y = 1$ (рис. 175).

Решение. Область G представляет собой фигуру, ограниченную слева параболой $y^2 = x + 1$, справа прямой $y = -x + 1$. Решая совместно уравнения параболы и прямой, находим точки их пересечения: $M_1(3; -2)$, $M_2(0; 1)$. Следовательно, искомая площадь

$$s = \iint_G dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y} dx = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \frac{9}{2}.$$

При вычислении двойных интегралов с помощью повторного интегрирования одним из главных моментов является расстановка пределов интегрирования. Если в данном примере выбрать другой порядок повторного интегрирования (сначала по y , а затем по x),

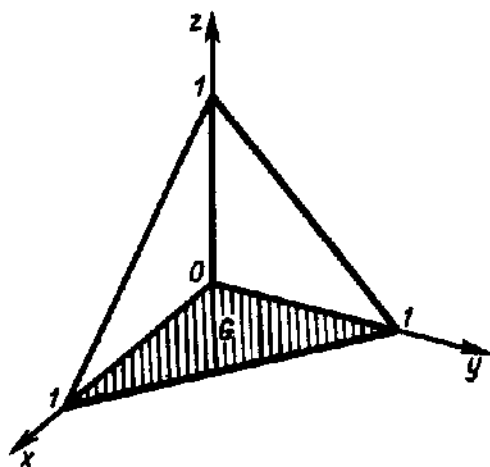


Рис. 174

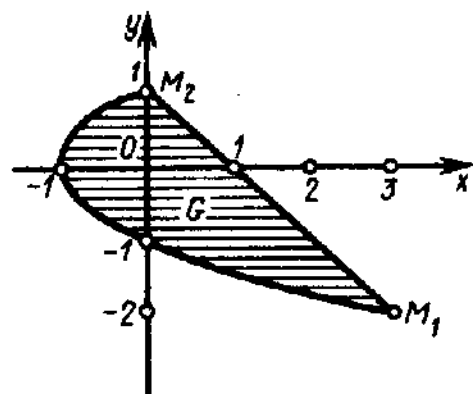


Рис. 175

то область G предварительно пришлось бы разбить на две части (осью Oy), так как она ограничена сверху линией, заданной на отрезках $-1 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq 3$ двумя различными уравнениями. Разумеется, был бы получен тот же результат, однако вычисления оказались бы более громоздкими.

Поэтому полезно запомнить следующее правило: если все прямые, параллельные оси Oy , входят в область интегрирования G на линии, заданной одним уравнением, и выходят из области на линии, заданной другим уравнением, то внутренний интеграл целесообразно брать по переменной y , а внешний — по x ; аналогично, если все прямые, параллельные оси Ox , входят в область интегрирования на линии, заданной одним уравнением (в данном случае на параболу), и выходят на линии, заданной другим уравнением (в данном случае на прямую), то внутренний интеграл следует брать по переменной x , а внешний — по y : в этом случае область интегрирования не нужно разбивать на части.

3. Вычисление площади поверхности. С помощью двойных интегралов можно вычислять площади не только плоских фигур, но и кривых поверхностей.

Пусть поверхность S задана уравнением $z=f(x, y)$, проекцией S на плоскость Oxy является область G (рис. 176) и в этой области функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Для определения площади поверхности S разобьем область G произвольно на n частей G_i без общих внутренних точек с площадями Δs_i ($i=1, 2, \dots, n$) и обозначим через S_i часть поверхности S , проекцией которой на плоскость Oxy является частичная область G_i . Таким образом, поверхность S будет разбита на n частей.

В каждой части G_i выберем произвольную точку (ξ_i, η_i) , на поверхности S ей будет соответствовать точка $M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$. Проведем через точку M_i касательную плоскость к поверхности:

$$f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) - (z - z_i) = 0,$$

здесь x, y, z — координаты произвольной точки на плоскости; $\xi_i, \eta_i, z_i=f(\xi_i, \eta_i)$ — координаты точки касания (см. гл. 12, § 4, п. 2). Напомним, что вектор $\vec{n}$ (нормаль), перпендикулярный касательной плоскости, имеет следующие координаты: $\vec{n} = \{-f'_x(\xi_i, \eta_i); -f'_y(\xi_i, \eta_i); +1\}$. (Здесь вектор $\vec{n}$ направлен противоположно вектору $\vec{n}$ из гл. 12, § 4, п. 2. Данный вектор $\vec{n}$ образует острый угол с осью Oz .)

Рассмотрим на касательной плоскости ту ее часть, проекцией которой на плоскость Oxy является область G_i . Обозначим эту часть через σ_i , а ее площадь через $\Delta\sigma_i$. Площадь $\Delta\sigma_i$ можно считать приближенно равной площади части S_i поверхности, а сумму всех таких площадей

$$\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$$

приближенным значением площади всей поверхности S .

За точное значение площади поверхности S примем по определению предел такой суммы

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i^*, \quad (1)$$

* Определение предела суммы $\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$ при $\lambda \rightarrow 0$ аналогично определению предела интегральной суммы для двойного интеграла (см. список на с. 307). В дальнейшем все аналогичные определения опущены.

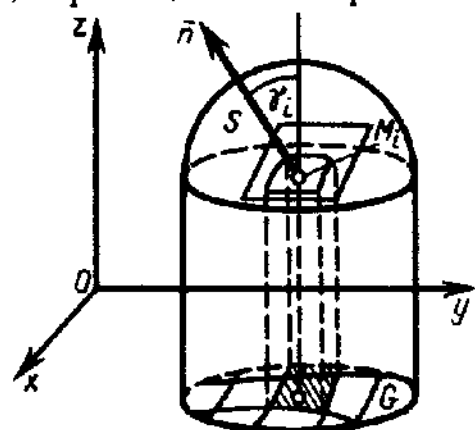


Рис. 176

где λ — наибольший из диаметров частичных областей G_i . Докажем, что этот предел существует и равен двойному интегралу

$$s = \iint_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy. \quad (2)$$

Обозначим через γ_i угол между вектором $\vec{n}$ и осью Oz . Он равен углу между касательной плоскостью в точке M_i и плоскостью Oxy . Так как область G_i есть проекция σ_i на плоскость Oxy , то площади этих областей связаны соотношением

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos \gamma_i}.$$

Действительно, данная формула, как известно, справедлива для треугольников. Она, очевидно, справедлива и для плоских многоугольников, так как плоский многоугольник можно разбить на несколько треугольников. Она также справедлива и для любой плоской фигуры. площади $\Delta\sigma$, ограниченной некоторой кривой, поскольку ее площадь можно рассматривать как предел площадей вписанных в нее многоугольников.

С другой стороны, как известно из аналитической геометрии.

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Следовательно,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i$$

Подставляя значение $\Delta\sigma_i$ в сумму (1), получаем

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i.$$

Стоящая под знаком предела сумма представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$. Так как эта функция по условию непрерывна в области G , то предел этой суммы при $\lambda \rightarrow 0$ существует и равен двойному интегралу (2), что и требовалось доказать.

Соотношение (2) представляет собой формулу, с помощью которой вычисляется площадь поверхностей, заданных уравнением $z = f(x, y)$.

Пример 3. Вычислить площадь той части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая заключена в первом октанте (рис. 177).

Решение. Так как функция $z = 6 - 3x - (3/2)y$ и область G , являющаяся проекцией данной части поверхности на плоскость Oxy , удовлетворяют сформулированным выше условиям, то искомую площадь можно вычислить по формуле (2). Имеем

$$f'_x(x, y) = -3, f'_y(x, y) = -3/2;$$

$$\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} = \sqrt{1 + 9 + 9/4} = 7/2.$$

Областью G является треугольник, ограниченный осями Ox , Oy и прямой $6x + 3y = 12$, получаемой из уравнения данной плоскости при $z = 0$. Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле, получаем

$$s = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \frac{7}{2} dy = \frac{7}{2} \int_0^2 [y]_0^{4-2x} dx = \frac{7}{2} \int_0^2 (4 - 2x) dx = \\ = \frac{7}{2} [4x - x^2]_0^2 = \frac{7}{2} \cdot 4 = 14.$$

4. Вычисление массы пластинки. Рассмотрим на плоскости Oxy материальную пластинку, т. е. некоторую область G , по которой распределена масса m с плотностью $\rho(x, y)$. Вычислим по заданной плотности $\rho(x, y)$ массу m этой пластинки, считая, что $\rho(x, y)$ — непрерывная функция. Разобьем G произвольно на n частей G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и обозначим через m_i массы этих частей. В каждой

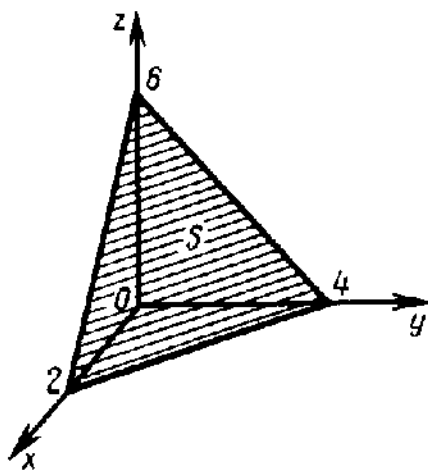


Рис. 177

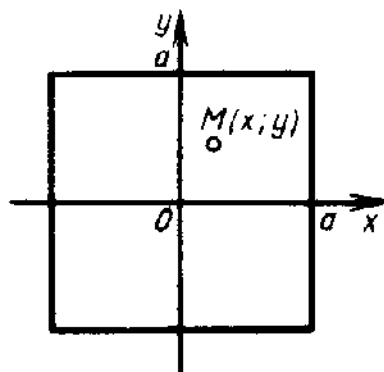


Рис. 178

части произвольно возьмем точку (ξ_i, η_i) . Массу m_i каждой такой части G_i можно считать приближенно равной $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, где Δs_i — площадь G_i , а масса m всей пластинки приближенно равна сумме

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

которая является интегральной суммой для непрерывной функции $\rho(x, y)$ в области G . В пределе при $\lambda \rightarrow 0$, очевидно, получим точное значение массы пластинки, равное двойному интегралу от функции $\rho(x, y)$ по области G , т. е.

$$m = \iint_G \rho(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Пример 4. Определить массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность $\rho(x, y)$ в каждой точке $M(x, y)$ пропорциональна квадрату расстояния от точки M до точки пересечения диагоналей, и коэффициент пропорциональности равен k .

Решение. Выберем систему координат так, как показано на рис. 178. После этого можно найти функцию $\rho(x, y)$ исходя из

условия задачи. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка квадратной пластинки. Тогда квадрат расстояния от точки M до точки пересечения диагоналей равен $x^2 + y^2$. Следовательно, плотность в точке M

$$\rho(M) = \rho(x, y) = k(x^2 + y^2).$$

По формуле (3) имеем

$$m = \iint_G k(x^2 + y^2) dx dy.$$

Учитывая, что подынтегральная функция четна относительно x и y , а область интегрирования симметрична относительно осей координат, можно ограничиться вычислением интеграла по той части области G , которая расположена в I четверти, т. е.

$$\begin{aligned} m &= 4k \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = 4k \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^a dx = \\ &= 4k \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = 4k \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right]_0^a = 4k \frac{2a^4}{3} = \frac{8}{3} ka^4. \end{aligned}$$

5. Вычисление координат центра масс пластинки. Найдем координаты центра масс пластинки, занимающей в плоскости Oxy некоторую область G . Пусть $\rho(x, y)$ — плотность этой пластинки в точке $M(x; y)$, причем $\rho(x, y)$ — непрерывная функция. Разбив область G на части G_i ($i=1, 2, \dots, n$), выберем в каждой из этих частей некоторую точку $(\xi_i; \eta_i)$ и будем приближенно считать массу m_i каждой из частей пластинки равной $\rho(\xi_i; \eta_i) \Delta s_i$ (Δs_i — площадь G_i). Если считать, что каждая из этих масс сосредоточена в одной точке, а именно в точке $(\xi_i; \eta_i)$, то для координат x_c и y_c центра масс такой системы материальных точек получим следующие выражения:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i}, \quad (4)$$

которые представляют собой приближенные значения координат центра масс пластинки. Чтобы получить точные значения этих координат, необходимо в (4) перейти к пределу при $\lambda \rightarrow 0$. При этом интегральные суммы перейдут в соответствующие интегралы и мы получим, что координаты центра масс пластинки определяются формулами

$$x_c = \frac{\iint_G x \rho(x, y) dx dy}{m}; \quad y_c = \frac{\iint_G y \rho(x, y) dx dy}{m}, \quad (5)$$

где $m = \iint_G \rho(x, y) dx dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, т. е. $\rho = \text{const}$, то формулы координат центра масс упрощаются:

$$x_c = \frac{\iint_G x \, dx \, dy}{\iint_G dx \, dy}; \quad y_c = \frac{\iint_G y \, dx \, dy}{\iint_G dx \, dy}. \quad (6)$$

Величины $M_y = \iint_G x \rho(x, y) \, dx \, dy$ и $M_x = \iint_G y \rho(x, y) \, dx \, dy$ в формулах (5) называются *статическими моментами* пластинки относительно осей Oy и Ox .

Таким образом, вычисление координат центра масс пластинки сводится к вычислению трех двойных интегралов.

Пример 5. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной двумя параболой $y^2 = x$ и $x^2 = y$ (рис. 179).

Решение. Координаты центра масс данной пластинки найдем по формулам (6). Сначала вычислим массу пластинки

$$m = \iint_G dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{3}.$$

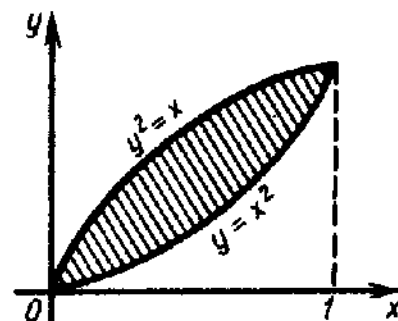


Рис. 179

Далее вычислим статические моменты ее относительно осей координат:

$$M_y = \iint_G x \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \frac{3}{20};$$

$$M_x = \iint_G y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy = \frac{3}{20}.$$

Затем по формулам (6) найдем

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3} = \frac{9}{20}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3} = \frac{9}{20}.$$

Итак, $x_c = y_c = \frac{9}{20}$.

6. Вычисление момента инерции пластинки. Как известно, момент инерции материальной точки относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси, а момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерции этих точек.

Пусть область G плоскости Oxy занята пластинкой, имеющей непрерывную плотность $\rho(x, y)$. Разбив область G на части G_i , площади которых равны Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$), и выбрав в каждой из них некоторую точку (ξ_i, η_i) , заменим пластинку системой

материальных точек с массами $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$ и координатами (ξ_i, η_i) . Момент инерции такой системы точечных масс, например, относительно оси Oy равен $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$. Примем это выражение за приближенное значение момента инерции пластинки. Но оно же представляет собой интегральную сумму для непрерывной функции $x^2 \rho(x, y)$. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем для момента инерции пластинки относительно оси Oy следующую формулу:

$$I_y = \iint_G x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Аналогично, момент инерции пластинки относительно оси Ox равен

$$I_x = \iint_G y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Найдем момент инерции I_0 пластинки относительно начала координат. Принимая во внимание, что момент инерции материальной точки с массой m относительно начала координат равен $m(x^2 + y^2)$, рассуждая, как и выше, получаем, что

$$I_0 = \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy, \quad (7)$$

т. е.

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Пример 6. Найти момент инерции круга радиуса R с постоянной плотностью $\rho(x, y) = 1$ относительно начала координат.

Решение. По формуле (7) имеем

$$I_0 = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам. Уравнение окружности (границы круга) в полярных координатах имеет вид $\rho = R$. Поэтому

$$I_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R d\varphi = \frac{1}{4} [R^4 \varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

§ 5. Криволинейные интегралы

Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой, лежащей в плоскости.

Интегралы такого рода называются *криволинейными*. Они имеют широкое применение в различных разделах математики.

Различают два типа криволинейных интегралов: криволинейные интегралы первого и второго рода.

1. Определение криволинейного интеграла первого рода. Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую кривую AB , гладкую или кусочно-гладкую*, и предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на кривой AB .

Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n = B$, выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M_i^* (рис. 180) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i^*) \Delta l_i \quad (1)$$

где Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$. Сумма (1) называется *интегральной суммой* для функции $z = f(x, y) = f(M)$ по кривой AB . Обозначим через λ наибольшую из длин

частичных дуг $M_{i-1}M_i$ ($\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta l_i\}$).

Определение. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ по кривой AB* и обозначается одним из следующих символов

$$I = \int_{AB} f(M) dl = \int_{AB} f(x, y) dl.$$

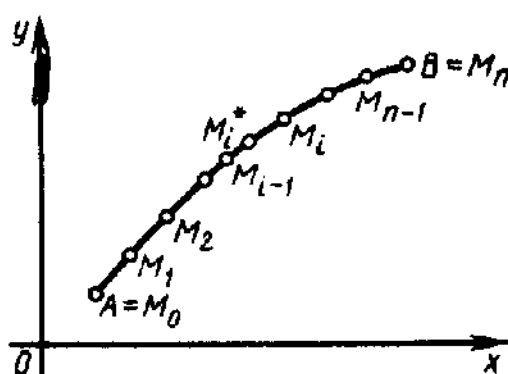


Рис. 180

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB , сама кривая AB — *контуром интегрирования*, A — *начальной*, а B — *конечной точками интегрирования*.

Криволинейный интеграл первого рода легко сводится к определенному интегралу. Действительно, приняв на кривой AB за параметр длину дуги l , отсчитываемую от точки A , получим параметрическое представление кривой $x = x(l)$, $y = y(l)$ ($0 \leq l \leq L$). При этом функция $f(x, y)$, заданная вдоль AB , становится сложной функцией параметра $l: f[x(l), y(l)]$. Обозначив через l_i^* значение параметра l , отвечающее точке M_i^* , а через l_i — отвечающее точке M_i , перепишем интегральную сумму (1) в виде

$$\sum_{i=1}^n f[x(l_i^*), y(l_i^*)] \Delta l_i \quad (2)$$

где $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$ и $l_{i-1} \leq l_i^* \leq l_i$. Сумма (2) является интегральной для определенного интеграла от функции $f[x(l), y(l)]$ на отрезке $[0, L]$. Поскольку интегральные суммы (1) и (2) равны между

* Кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, называется *гладкой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (тем самым кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой*.

собой, равны и соответствующие им интегралы, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^L f[x(l), y(l)] dl. \quad (3)$$

Заметим, что формула (3) не только выражает криволинейный интеграл через определенный, но и доказывает существование криволинейного интеграла от функции $f(x, y)$, непрерывной вдоль рассматриваемой кривой AB *

Как было показано, криволинейный интеграл первого рода непосредственно сводится к определенному, однако между этими понятиями имеется следующее различие. В интегральной сумме (1) величины Δl_i обязательно положительны, независимо от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую — конечной, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl,$$

в то время как определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при перестановке пределов интегрирования меняет знак. В остальном криволинейный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл. Это непосредственно вытекает из формулы (3).

Криволинейный интеграл первого рода, так же как и определенный, имеет геометрический смысл. Если определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при $f(x) \geq 0$ представляет собой площадь криволиней-

ной трапеции, то криволинейный интеграл $\int_{AB} f(M) dl$ при $f(M) \geq 0$

численно равен площади куска цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости Oxy , восстановленных в точках $M(x, y)$ кривой AB и имеющих переменную длину $f(M)$ (рис. 181).

В частности, если AB — не кривая, а отрезок прямой $[a, b]$, расположенный на оси Ox , то $f(x, y) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$ и криволинейный интеграл будет обычным определенным интегралом.

Наконец, если положить $f(M) \equiv 1$, то получим криволинейный интеграл $\int_{AB} dl$, значение которого есть длина дуги кривой AB .

Таким образом, с помощью криволинейного интеграла первого рода можно вычислять площадь цилиндрических поверхностей и длины дуг. Кроме этого, криволинейный интеграл первого рода имеет широкое применение в физике. С его помощью можно, как это делали в случае двойных интегралов, находить массу матери-

* Непрерывность функции $f(x, y) = f(M)$ вдоль кривой AB означает, что

$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ в любой точке M_0 кривой AB , где M также точка этой кривой.

альной кривой по ее плотности, моменты инерции относительно координатных осей, координаты центра масс такой кривой и т. д.

2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определенных интегралов.

Пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ функции, а $f(x, y)$ — функция, непрерывная вдоль этой кривой, причем для определенности будем считать, что точке A соответствует значение $t = \alpha$, точке B — значение $t = \beta$. Тогда для любой точки $M(\varphi(t); \psi(t))$ кривой AB длину l дуги AM можно рассматривать как функцию параметра $t: l = l(t)$, и вычислять ее (гл. 8, § 10, п. 3) по формуле

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

откуда, согласно правилу дифференцирования интеграла по верхнему пределу,

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

Заменяя переменную $l = l(t)$ в определенном интеграле в правой части равенства (3) и учитывая (4), получаем

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(x, y) dl &= \int_0^L f[x(t), y(t)] dl = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} y^2 dl$, где AB — часть окружности $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
Решение. Так как

$$y^2 = a^2 \sin^2 t, \quad dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a dt,$$

то по формуле (5) получаем

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dl &= \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \cdot a dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3 \pi}{4}. \end{aligned}$$

В частности, если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, где $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция *,

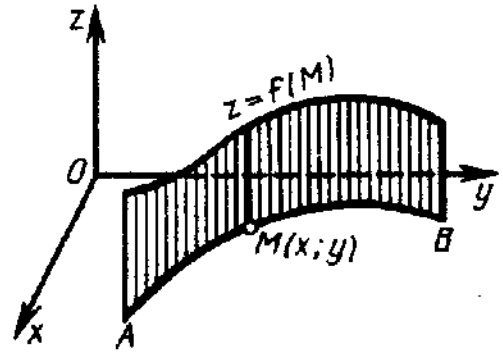


Рис. 181

* Т. е. имеющая непрерывную производную.

то, принимая x за параметр ($t = x$), из формулы (5) имеем

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (6)$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} y dl$, где AB — дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0; 0)$ до точки $(2; 2)$.
Решение. Имеем

$$y = \sqrt{2x}, y' = 1/\sqrt{2x}, dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + 1/(2x)} dx.$$

По формуле (6) получаем

$$\begin{aligned} \int_{AB} y dl &= \int_0^2 \sqrt{2x} \sqrt{1 + 1/(2x)} dx = \\ &= \int_0^2 \sqrt{2x + 1} dx = \frac{1}{3} [(2x + 1)^{3/2}]_0^2 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Формула (4) представляет самостоятельный интерес. Возводя в квадрат, получаем: $(dl)^2 = [\varphi'(t) dt]^2 + [\psi'(t) dt]^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Это равенство дает простое геометрическое истолкование дифференциала дуги dl . Учитывая, что дифференциал функции $y = y(x)$ равен приращению ординаты касательной (гл. 5, § 3, п. 1), получаем, что дифференциал дуги dl (см. рис. 185) равен длине отрезка касательной к кривой AB от точки касания с абсциссой x до точки $(x + dx; y + dy)$, т. е. гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами $|dx|$ и $|dy|$, а равенство $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ представляет собой теорему Пифагора.

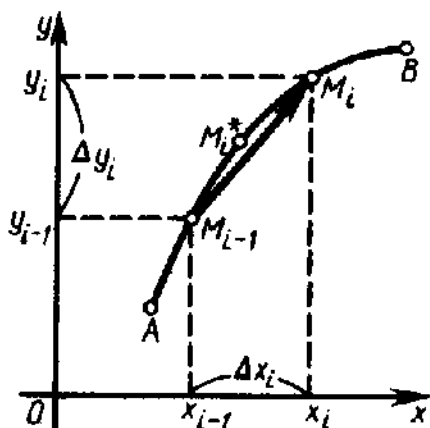


Рис. 182

3. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть на кривой AB определены две ограниченные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB на n частей точками $A = M_0, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$. Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат (рис. 182), на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольную точку M_i^* и составим интегральную сумму для функции $P(x, y)$ [$Q(x, y)$]:

$$\sum_{i=1}^n P(M_i^*) \Delta x_i \left[\sum_{i=1}^n Q(M_i^*) \Delta y_i \right]. \quad (7)$$

Определение. Если интегральная сумма (7) при $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta l_i\}$, Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$) имеет предел, равный I , то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривой AB и обозначается

$$\int_{AB} P(x, y) dx \left[\int_{AB} Q(x, y) dy \right].$$

Сумму

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

называют *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначают символом

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.*$$

Криволинейные интегралы второго рода, как и интегралы первого рода, легко сводятся к определенным интегралам.

Действительно, пусть кривая AB задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ функции, причем точке A кривой соответствует значение $t = \alpha$, точке B — значение $t = \beta$, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль кривой AB . Тогда справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt; \\ \int_{AB} Q(x, y) dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt, \end{aligned}$$

сводящие криволинейные интегралы к определенным интегралам.

Докажем первую из формул (8):

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt, \quad (9)$$

вторая формула доказывается аналогично, а третья получается в результате сложения первой и второй.

Пусть точкам M_i разбиения кривой AB соответствуют значения t_i параметра t , точкам M_i^* — значения t_i^* , т. е. M_i имеет координаты $[\varphi(t_i); \psi(t_i)]$, а M_i^* — координаты $[\varphi(t_i^*); \psi(t_i^*)]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Функция $P(x, y)$ на кривой является сложной функцией параметра t : $P[\varphi(t), \psi(t)]$. Так как функции $x = \varphi(t)$ и

* Вместо $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ иногда будем писать просто P и Q , а криволинейный интеграл записывать в виде $\int_{AB} P dx + Q dy$.

$y = \psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $P(x, y)$ непрерывна вдоль кривой AB , то по теореме о непрерывности сложной функции функция $P[\varphi(t), \psi(t)]$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Составим интегральную сумму (7) для функции $P(x, y)$:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n P(M_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] \Delta x_i.$$

Так как $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt.$$

Поэтому

$$\sigma = \sum_{i=1}^n P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] \varphi'(t) dt.$$

С другой стороны, так как функция $P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$ является непрерывной функцией на $[\alpha, \beta]$, то для нее существует определенный интеграл, стоящий в формуле (9) справа. Запишем его в виде суммы интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t_i]$

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Рассмотрим и оценим разность

$$\sigma - I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\} \varphi'(t) dt. \quad (10)$$

Из непрерывности функции $P[\varphi(t), \psi(t)]$ на $[\alpha, \beta]$ по теореме Кантора следует ее равномерная непрерывность на $[\alpha, \beta]$. А это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\mu =$

$= \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\} < \delta$ выполняется неравенство

$$|P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] - P[\varphi(t), \psi(t)]| < \varepsilon. \quad (11)$$

Из непрерывности функции $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$ следует ее ограниченность на $[\alpha, \beta]$, т. е. существует число k такое, что

$$|\varphi'(t)| \leq k. \quad (12)$$

Используя (11) и (12), получаем для разности (10) следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\sigma - I| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |P[\varphi(t_i^*), \psi(t_i^*)] - P[\varphi(t), \psi(t)]| |\varphi'(t)| dt < \\ &< \varepsilon k \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon k (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности ε , следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma = I. \quad (13)$$

Но при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ также $\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$ ($\Delta t_i =$

$= t_i - t_{i-1}$) и наоборот. В самом деле, $\Delta t_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$.

Из непрерывности функций $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$ следует непрерывность функции $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ на $[\alpha, \beta]$. Но тогда $m\Delta t_i \leq \Delta t_i \leq M\Delta t_i$, где m и M — минимальное и максимальное значения функции $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $m > 0$ и $M > 0$ в силу условия $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$. Из левого неравенства следует, что $\mu \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, а из правого, что $\lambda \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Следовательно, из (13) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

т. е. существует криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x, y) dx$ и справедлива формула (9).

Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла, что непосредственно вытекает из формул (8).

В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) проходится кривая AB , и меняет знак при изменении направления обхода кривой, т. е.

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y) dy = - \int_{BA} Q(x, y) dy.$$

Действительно, изменив направление обхода кривой, мы соответственно изменим знаки проекций Δx_i и Δy_i в суммах (7), и, следовательно, сами суммы и их пределы изменят знак.

Таким образом, при вычислении криволинейных интегралов второго рода необходимо учитывать направление интегрирования.

В случае, когда L замкнутая кривая, т. е. когда точка B совпадает с точкой A , из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L условимся называть *положительным* то направление, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление обхода контура L условимся называть *отрицательным*.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L , пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

4. Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Криволинейные интегралы второго рода вычисляются сведением их к определенным интегралам по формулам (8).

В частности, если кривая AB задана уравнением вида $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, где $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то, принимая x за параметр ($t = x$), из формул (8) получаем

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P[x, y(x)] dx, \quad \int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx, \quad (14)$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)] y'(x)\} dx.$$

Аналогичные формулы имеют место, если кривая AB задана уравнением вида $x = x(y)$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{AB} x^2 dx + xy dy$, где AB — четверть окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, A соответствует $t = 0$, B соответствует $t = \pi/2$.

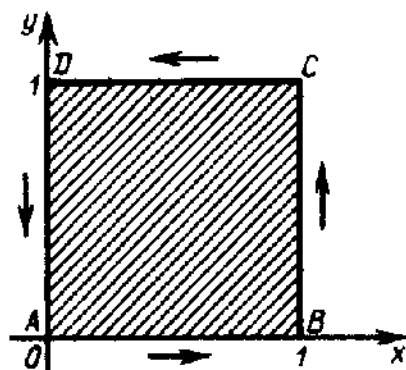


Рис. 183

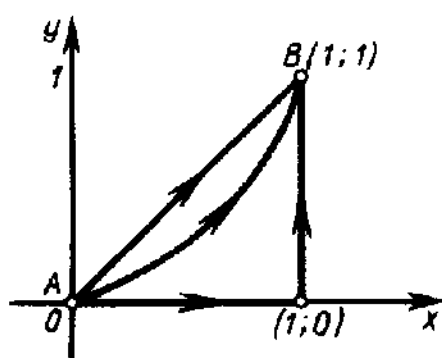


Рис. 184

Решение. Имеем $x^2 = \cos^2 t$, $dx = -\sin t dt$, $xy = \cos t \sin t$, $dy = \cos t dt$. По третьей из формул (8) получаем

$$\int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t) dt = 0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\oint_L (x+y) dy$, где L — контур прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$ и $y=1$ (рис. 183).

Решение. На рис. 183 положительное направление обхода контура L обозначено стрелками. Разбивая весь контур интегрирования на части, запишем:

$$\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}.$$

Легко заметить, что интегралы вдоль участков AB и CD равны нулю, так как на них y является постоянным и, следовательно, $dy=0$. Поэтому остается вычислить интегралы по участкам BC и DA . По формуле, аналогичной первой из формул (14) [заменяя x на y и $y(x)$ на $x(y)$], получаем

$$\int_{BC} (x+y) dy = \int_0^1 (1+y) dy = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2},$$

$$\int_{DA} (x+y) dy = \int_1^0 (0+y) dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^0 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\oint_L (x+y) dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

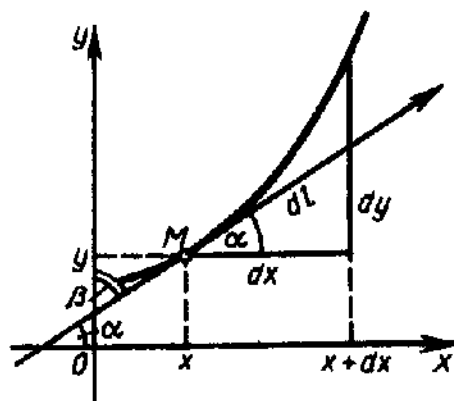


Рис. 185

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy$, где:

а) AB — прямая $y=x$, соединяющая точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$;

б) AB — парабола $y=x^2$, соединяющая те же точки;

в) AB — ломаная, проходящая через точки $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$ (рис. 184).

Решение. По третьей формуле (14) имеем:

$$\text{а) } \int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2;$$

$$\text{б) } \int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2;$$

$$\text{в) } \int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 3x^2 \cdot 0 dx + \int_0^1 (1 + 1) dy = \int_0^1 2 dy = 2.$$

Заметим, что взяв три различных пути, соединяющих одни и те же точки, мы получили три одинаковых результата. Это обстоятельство не является случайным. Причина его будет раскрыта в § 7.

5. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Обозначим через α и β углы, составляемые с осями координат направленной касательной * к кривой AB в точке $M(x; y)$ (рис. 185); тогда получим соотношения

$$dx = \cos \alpha dl, \quad dy = \cos \beta dl. \quad ** \quad (15)$$

Заменяя в криволинейных интегралах второго рода dx и dy их выражениями (15), преобразуем эти интегралы в криволинейные

* За положительное направление касательной примем то, которое соответствует направлению движения точки по кривой от A к B .

** См. замечание п. 2.

интегралы первого рода:

$$\begin{aligned}\int_{AB} P(x, y) dx &= \int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dl, \\ \int_{AB} Q(x, y) dy &= \int_{AB} Q(x, y) \cos \beta dl,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] dl.$$

Таким образом, формулы (16) выражают криволинейные интегралы второго рода через криволинейные интегралы первого рода и устанавливают связь между ними. При изменении направления движения точки по кривой на противоположное $\cos \alpha$, $\cos \beta$, dx и dy меняют знак, и формулы (16) остаются в силе.

В заключение заметим, что были рассмотрены криволинейные интегралы для плоских кривых. Однако их определение и свойства нетрудно перенести и на пространственные кривые.

Пусть AB — пространственная кривая и на этой кривой определены функции $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. Тогда по аналогии со случаем плоской кривой можно определить криволинейный интеграл первого рода $\int_{AB} f(x, y, z) dl$ и криволинейные

$$\begin{aligned}\text{интегралы второго рода: } &\int_{AB} P(x, y, z) dx, \int_{AB} Q(x, y, z) dy, \\ &\int_{AB} R(x, y, z) dz, \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.\end{aligned}$$

Техника вычисления таких интегралов не отличается по существу от техники вычисления интегралов по плоской кривой.

§ 6. Формула Грина

Формула Грина * устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами. Она имеет широкое применение как в самом анализе, так и в его приложениях.

Докажем эту формулу для замкнутой области, граница которой пересекается с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках. Для краткости будем называть такие области *простыми*: Предполагается, что контур, ограничивающий область, гладкий или кусочно-гладкий.

Теорема 13.6. Пусть G — некоторая простая замкнутая область, ограниченная контуром L , и пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в данной области. Тогда имеет место формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,\tag{1}$$

называемая формулой Грина.

* Грин Джордж (1793—1841) — английский математик и физик.

Доказательство. Пусть контур L , ограничивающий область G , может быть задан как уравнениями $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$ ($c \leq y \leq d$), $x_1(y) \leq x_2(y)$, так и уравнениями $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ ($a \leq x \leq b$), $y_1(x) \leq y_2(x)$ (рис. 186). Рассмотрим сначала область G , определенную неравенствами $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, и преобразуем двойной интеграл

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

в криволинейный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона—Лейбница выполним интегрирование по y . Получим

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned}$$

Каждый из этих двух определенных интегралов равен криволинейному интегралу второго рода, взятому по соответствующей кривой (см. формулы (14), § 5), а именно:

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, y_2(x)) dx &= \int_{ADB} P(x, y) dx = - \int_{BDA} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_1(x)) dx &= \int_{ACB} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \left[\int_{BDA} P(x, y) dx + \int_{ACB} P(x, y) dx \right],$$

т. е.

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (2)$$

Аналогично доказывается формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy \quad (3)$$

[при этом область G задается неравенствами $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$].

Вычитая из равенства (3) почленно равенство (2), получаем искомую формулу (1). ■

З а м е ч а н и е. Формула Грина остается справедливой для всякой замкнутой области G , которую можно разбить проведением дополнительных линий на конечное число простых замкнутых областей. Действительно, пусть область G с границей L имеет вид, изображенный на рис. 187. Разобьем ее на две простые области:

G_1 и G_2 , для каждой из которых справедлива формула (1). Напишем отдельно формулу Грина для G_1 и G_2 и сложим почленно полученные равенства. Слева будем иметь двойной интеграл по всей области G , а справа — криволинейный интеграл по контуру L области G , так как криволинейный интеграл по вспомогательной кривой берется дважды в противоположных направлениях и при суммировании взаимно уничтожается.

Пример. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L (x-y) dx + (x+y) dy$, где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Функции $P(x, y) = x - y$, $Q(x, y) = x + y$ и $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ непрерывны в замкнутом круге $x^2 + y^2 = R^2$.

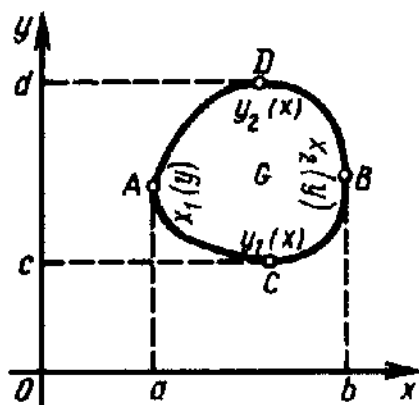


Рис. 186

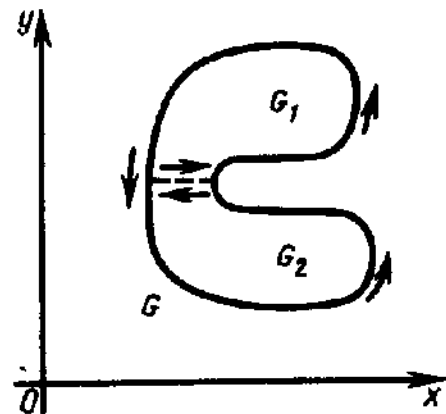


Рис. 187

Следовательно, по теореме 13.6 формула Грина применима к данному интегралу. Имеем

$$\oint_L (x-y) dx + (x+y) dy = \iint_G [1 - (-1)] dx dy = 2 \iint_G dx dy = 2s = 2\pi R^2.$$

Заметим, что полученный результат легко проверить непосредственно вычислением данного интеграла.

§ 7. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Как уже отмечалось при решении примера 5 (см. § 5, п. 4), в некоторых случаях величина криволинейного интеграла $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек A и B пути интегрирования. Выясним, при каких условиях такая независимость имеет место. В исследовании этого вопроса важную роль играет формула Грина.

Уточним, какие области будут рассматриваться далее.

Определение. Плоская область G называется односвязной, если каков бы ни был замкнутый контур L , лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром часть плоскости целиком принадлежит области G .

Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет «дыр». Например, односвязными областями являются внутренность круга, эллипса, многоугольника и т. п. Простейшим примером неодносвязной области служит область, заключенная между окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$. В самом деле, окружность $x^2 + y^2 = 2$, лежащая в этой области, содержит внутри себя точки, которые не принадлежат данной области, например начало координат $(0; 0)$.

Теорема 13.7. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой замкнутой односвязной области G . Тогда следующие четыре условия эквивалентны, т. е. выполнение любого из них влечет за собой выполнение остальных трех:

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L , расположенной в G ,

$$\oint_L P dx + Q dy = 0;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int_{AB} P dx + Q dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования, целиком лежащего в G ;

3) выражение $P dx + Q dy$ представляет собой полный дифференциал * некоторой функции, определенной в области G . Иными словами, существует такая функция $F(x, y)$, определенная в G , что

$$dF = P dx + Q dy;$$

4) в области G всюду

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1)$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по схеме

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1,$$

т. е. покажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, из третьего — четвертое, а из четвертого — снова первое. Тем самым будет доказана эквивалентность всех условий.

Первый этап: $1 \rightarrow 2$. Рассмотрим в области G два произвольных пути, соединяющих точки A и B : ACB и ADB — любые две кусочно-гладкие кривые (рис. 188). В сумме они составляют замкнутую кривую $L = ACB + BDA$, расположенную в G . Со-

* В теории криволинейных интегралов второго рода дифференциал функции $F(x, y)$ обычно называют полным дифференциалом.

гласно условию 1)

$$\oint_L P dx + Q dy = 0,$$

но

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy &= \int_{ACB} P dx + Q dy + \int_{BDA} P dx + Q dy = \\ &= \int_{ACB} P dx + Q dy - \int_{ADB} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_{ACB} P dx + Q dy = \int_{ADB} P dx + Q dy,$$

т. е. условие 2) выполняется.

Второй этап: 2→3. Пусть интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от выбора пути интегрирования, а зависит только от точек A и B . Тогда, если точку A зафиксировать: $A = A(x_0; y_0)$,

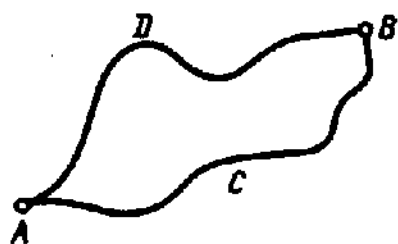


Рис. 188

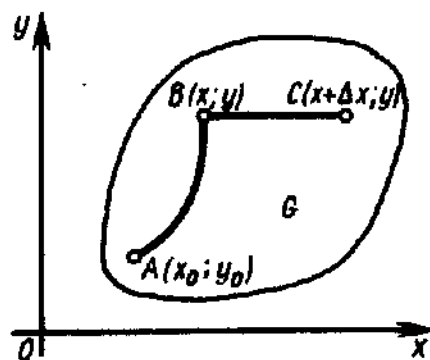


Рис. 189

то этот интеграл будет некоторой функцией координат x и y точки $B = B(x; y)$:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = F(x, y).$$

Покажем, что функция $F(x, y)$ дифференцируема и что

$$dF = P dx + Q dy. \quad (2)$$

Для этого достаточно доказать, что в каждой точке B области G существуют частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (3)$$

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в G , то из (3) следует дифференцируемость функции $F(x, y)$ и равенство (2).

Для доказательства существования частной производной функции $F(x, y)$ по x и первого из равенства (3) составим частное при-

ращение по x функции $F(x, y)$ в точке $B(x, y)$:

$$\begin{aligned}\Delta_x F &= F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \\ &= \int_{AC} P dx + Q dy - \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{BC} P dx + Q dy,\end{aligned}$$

где точка C имеет координаты $x + \Delta x$ и y (рис. 189). Так как по условию интеграл не зависит от вида кривой, то возьмем путь от $B(x, y)$ до $C(x + \Delta x, y)$ прямолинейным. Тогда

$$\Delta_x F = \int_{BC} P dx + Q dy = \int_{BC} P dx = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y) dx.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получаем

$$\Delta_x F = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y),$$

поскольку по условию $P(x, y)$ непрерывна. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Таким образом, условие 3) установлено.

Третий этап: $3 \rightarrow 4$. Пусть в области G определена функция $F(x, y)$ такая, что $dF = P dx + Q dy$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q,$$

и по теореме о равенстве смешанных производных

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

т. е. получено требуемое равенство (1).

Четвертый этап: $4 \rightarrow 1$. Пусть выполнено условие 4) и пусть L — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G и ограничивающая область G^* . Тогда, применяя формулу Грина к области G^* (здесь используется односвязность области G), получаем

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

В силу условия 4) интеграл справа равен нулю. Следовательно,

$$\oint_L P dx + Q dy = 0$$

для всякого замкнутого контура L , лежащего в области G . ■

З а м е ч а н и е. Из эквивалентности условий 1) — 4) теоремы 13.7, в частности, следует, что условие 3) представляет собой не-

обходимое и достаточное условие, при котором криволинейный интеграл не зависит от выбора пути интегрирования. Однако для приложений более удобным, необходимым и достаточным условием является условие 4).

Теорема 13.7 позволяет легко решать вопрос о том, зависит или не зависит криволинейный интеграл от выбора пути интегрирования. Так, например, $\int_{AB} e^y dx - y dy$ в любой области зависит от выбора пути, так как $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Необходимо обратить внимание на то, что все условия теоремы существенны. Рассмотрим, например, интеграл

$$I = \oint_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

где L — окружность радиуса R с центром в начале координат. Имеем:

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Видим, что условие независимости интеграла от выбора пути формально выполнено, но, однако, интеграл по окружности L нулю не равен. Действительно, задав окружность уравнениями $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t (-R \sin t) + R \cos t R \cos t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

На самом деле никакого противоречия с теоремой здесь нет. Просто не выполнено одно из условий теоремы: функции P и Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ не определены в точке $(0; 0)$, а круг, ограниченный окружностью L , с выброшенной точкой $(0; 0)$ уже не является односвязной областью (начало координат играет роль «дырки»).

§ 8. Интегрирование полных дифференциалов

Из рассмотрения условий независимости криволинейного интеграла $\int_{AB} P dx + Q dy$ от выбора пути интегрирования непосредственно вытекает решение вопроса об интегрировании полных дифференциалов и о нахождении функции по ее полному дифференциалу.

Было доказано, что если функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой области G , то

выражение

$$P dx + Q dy \quad (1)$$

является полным дифференциалом некоторой функции в этой области в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Далее мы показали, что если это равенство выполнено, то условию

$$dF = P dx + Q dy$$

удовлетворяет функция

$$F(x, y) = \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy. \quad (2)$$

Пусть теперь выражение (1) является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x, y)$. Тогда $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$ и разность $\Phi(x, y) - F(x, y)$ (см. замечание к теореме 12.6) величина постоянная. Следовательно,

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + C, \quad (3)$$

где C — некоторая постоянная. Полагая $x = x_0$, $y = y_0$, из (2) получаем $F(x_0, y_0) = 0$, а из (3) — значение постоянной $C: C = \Phi(x_0, y_0)$. Теперь (3) можно записать в виде

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0),$$

а равенство (2) — в виде

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Если, наконец, положить $x = x_1$, $y = y_1$, то получим формулу

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} P dx + Q dy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x, y) \Big|_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} \quad (4)$$

Формула (4) аналогична формуле Ньютона—Лейбница, но справедлива только при условии независимости криволинейного интеграла от выбора пути интегрирования.

Используя полученные результаты, теперь можно указать способ восстановления функции $F(x, y)$, полный дифференциал которой есть заданное выражение (1).

Формула

$$F(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy + C, \quad (5)$$

где $(x_0; y_0)$ — фиксированная точка, а C — произвольная постоянная, и дает возможность определить все функции, имеющие подынтегральное выражение своим полным дифференциалом.

Для отыскания $F(x, y)$ по формуле (5) достаточно, выбрав любую точку $(x_0; y_0)$ в области G , вычислить криволинейный интеграл по любой кривой, соединяющей точки $(x_0; y_0)$ и (x, y) . Так как в формуле (5) интеграл не зависит от выбора пути, то удобно, например, за путь интегрирования взять ломаную, звенья которой параллельны осям координат (рис. 190). Тогда

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y_0)} P dx + Q dy + \int_{(x; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy.$$

Так как $y = y_0$ и $dy = 0$ на участке от $(x_0; y_0)$ до $(x; y_0)$, а $dx = 0$ на участке от $(x; y_0)$ до $(x; y)$, то равенство (5) принимает вид

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C,$$

где первый определенный интеграл вычисляется при постоянном y , равном y_0 , а второй — при постоянном x .

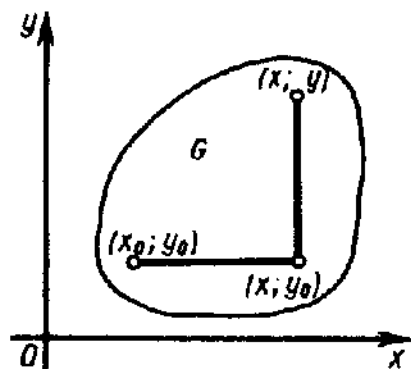


Рис. 190

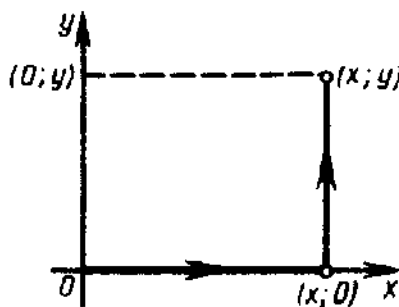


Рис. 191

Пример 1. Проверить, является ли выражение $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, и, если это так, найти $F(x, y)$.

Решение. В данном выражении функции

$$P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2, \quad Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 \quad (6)$$

непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$, которые равны между собой. Следовательно, данное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Для отыскания функции $F(x, y)$ воспользуемся формулой (2), где $A(x_0; y_0)$ — некоторая фиксированная точка, а $B(x; y)$ — переменная точка.

В данном случае за точку $A(x_0; y_0)$ удобно взять точку $(0; 0)$.

Учитывая, что криволинейный интеграл $\int_{(0; 0)}^{(x; y)} (x^2 + 2xy - y^2) dx +$

$+(x^2 - 2xy - y^2) dy$ не зависит от пути интегрирования, выберем путь интегрирования от точки $(0; 0)$ до точки $(x; y)$ в виде ломаной, звенья которой параллельны осям координат. Для этого достаточно взять точку $(x; 0)$ [или точку $(0; y)$] (рис. 191). Тогда одно звено ломаной будет лежать на оси координат. Имеем

$$F(x, y) = \int_{(0; 0)}^{(x; y)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy + C = \\ = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy + C = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Практически при отыскании функции по ее полному дифференциалу удобно поступать следующим образом. Если

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q,$$

то, интегрируя первое из этих равенств по x , получаем

$$F(x, y) = \int P dx + f_1(y), \quad (7)$$

а интегрируя второе равенство по y , имеем

$$F(x, y) = \int Q dy + f_2(x), \quad (8)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции. Если подобрать функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ так, чтобы правые части равенств (7) и (8) совпали, то полученная таким образом функция $F(x, y)$ и является функцией, полный дифференциал которой совпадает с выражением $P dx + Q dy$.

Так, например, пусть $dF = (2xy + 1) dx + (x^2 + 3y^2) dy$. Интегрируя коэффициент при dx по x , получаем

$$\int (2xy + 1) dx = x^2y + x + f_1(y); \quad (9)$$

интегрируя коэффициент при dy по y , имеем

$$\int (x^2 + 3y^2) dy = yx^2 + y^3 + f_2(x). \quad (10)$$

Правые части равенств (9) и (10) совпадают, если положить $f_1(y) = y^3 + C$, $f_2(x) = x + C$.

Таким образом,

$$F(x, y) = yx^2 + y^3 + x + C.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(-1; 2)}^{(2; 3)} y dx + x dy$.

Решение. В данном случае функции

$$P = y, \quad Q = x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

непрерывны и частные производные равны между собой. Значит, выражение $ydx + xdy$ является полным дифференциалом $dF(x, y)$ и данный интеграл не зависит от пути интегрирования. По формулам (7) и (8) находим $F(x, y) = xy$, и по формуле (4) получаем

$$\int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} y dx + x dy = xy \Big|_{(-1, 2)}^{(2, 3)} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 6 + 2 = 8.$$

Заметим, что данный интеграл можно вычислить и непосредственно, если, например, взять в качестве пути интегрирования ломаную, соединяющую точки $(-1; 2)$, $(2; 2)$ и $(2; 3)$, звенья которой параллельны осям координат (проделайте самостоятельно).

§ 9. Некоторые приложения криволинейных интегралов второго рода

Криволинейные интегралы второго рода, так же как и первого рода, имеют широкое применение в геометрии, физике и технике. Ограничимся рассмотрением двух задач: вычислением площадей плоских фигур и определением работы силы.

1. Вычисление площади с помощью формулы Грина. Пусть G — некоторая область с границей L и s — площадь этой области.

Известно, что двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$ при $f(x, y) \equiv 1$ выражает площадь области G . Поэтому если в формуле Грина подобрать функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ таким образом, чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$, то площадь s области G определяется формулой

$$s = \iint_G dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

Положим $Q(x, y) = x$ и $P(x, y) = 0$; тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ и

$$s = \oint_L x dy.$$

Полагая $P(x, y) = -y$ и $Q(x, y) = 0$, аналогично находим

$$s = - \oint_L y dx,$$

а при $P(x, y) = -y/2$, $Q(x, y) = x/2$ имеем

$$s = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (1)$$

Таким образом, получены три формулы для вычисления площадей плоских фигур, ограниченных контуром L .

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом.

Решение. Вычислим, например, площадь по формуле (1). Используя параметрические уравнения эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, имеем: $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$, и

по формуле (1) получаем

$$s = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \sin t a \sin t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

2. Работа силы. Известно, что работа, совершаемая переменной силой $F(x)$, направленной вдоль оси Ox , по перемещению материальной точки вдоль оси Ox из точки $x=a$ в точку $x=b$ ($a < b$) определяется с помощью определенного интеграла по формуле

$$A = \int_a^b F(x) dx \text{ (гл. 6, § 8, п. 6).}$$

Рассмотрим более общую задачу.

Пусть материальная точка под действием силы $\overline{F}$ перемещается вдоль непрерывной плоской кривой BC в направлении от B к C . Сила $\overline{F}$ предполагается переменной, зависящей от положения точки на кривой BC . Вычислим работу силы $\overline{F}$ при перемещении точки из B в C . Для этого разобьем (рис. 192) произвольно кривую BC на n частей точками $B = M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n = C$. Заменим приближенно на участке $M_i M_{i+1}$ силу $\overline{F}$ постоянным значением, равным ее значению в точке M_i , т. е. $\overline{F}_i \approx \overline{F}(M_i)$, а движение точки по дуге $M_i M_{i+1}$ заменим движением по отрезку $M_i M_{i+1}$. Тогда работу постоянной силы $\overline{F}(M_i)$ вдоль отрезка $M_i M_{i+1}$ можно принять за приближенное значение работы A_i переменной силы $\overline{F}$ вдоль дуги $M_i M_{i+1}$, т. е.

$$A_i \approx \overline{F}(M_i) \cdot \overline{M_i M_{i+1}}.$$

Правая часть этого приближенного равенства представляет собой скалярное произведение двух векторов $\overline{F}(M_i)$ и $\overline{M_i M_{i+1}}$. Оно равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т. е. если $\overline{F}(M_i) = \{P(M_i); Q(M_i)\}$, $\overline{M_i M_{i+1}} = \{\Delta x_i; \Delta y_i\}$, то $A_i \approx P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i$. Суммируя по всем значениям i от 1 до n , получаем приближенное значение работы A вдоль всей кривой BC :

$$A \approx \sum_{i=1}^n [P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i] = \\ = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta y_i. \quad (2)$$

За точное значение работы A принимается предел, к которому стремится ее приближенное значение при стремлении к нулю наибольшей из длин дуг $M_i M_{i+1}$. Но, с другой стороны, сумма (2) представляет собой сумму двух интегральных сумм для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, заданных на кривой BC . По определению пределом этой суммы является криволинейный интеграл второго рода.

Следовательно, работа силы определяется по формуле

$$A = \int_{BC} P dx + Q dy, \quad (3)$$

где P и Q — координаты (или проекции на оси координат) силы $\vec{F}$.

Если рассмотреть данную задачу не на плоскости, а в пространстве, то решение ее сводится к вычислению криволинейного интеграла второго рода по пространственной кривой по формуле

$$A = \int_{BC} P dx + Q dy + R dz.$$

Пример 2. Вычислить работу силы $\vec{F}(x, y)$ при перемещении материальной точки по эллипсу в положительном направлении, если сила в каждой точке (x, y) эллипса направлена к центру эллипса и по величине равна расстоянию от точки (x, y) до центра эллипса (рис. 193).

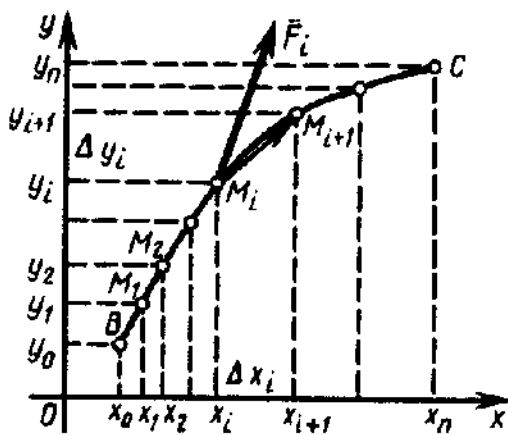


Рис. 192

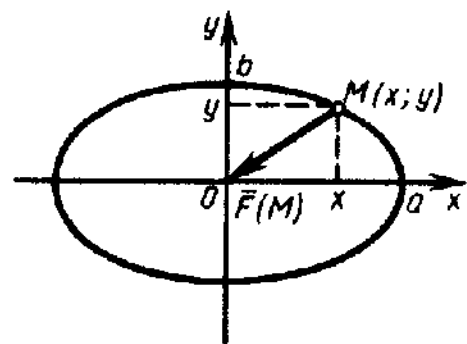


Рис. 193

Решение. По условию, $|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$; координаты силы $\vec{F}(x, y)$ таковы: $P = -x$, $Q = -y$ [знак « $-$ » объясняется тем, что сила направлена к точке $(0; 0)$]. По формуле (3) имеем

$A = -\oint_L x dx + y dy$, где L — эллипс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Следовательно,

$$A = \frac{a^2 - b^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = \frac{a^2 - b^2}{4} (-\cos 2t) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Заметим, что из того, что интеграл оказался равным нулю, следует, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции (найдите эту функцию самостоятельно).

§ 10. Тройные интегралы

В начале главы было введено понятие двойного интеграла от функции двух переменных. Определим интеграл от функции трех переменных — так называемый тройной интеграл. Тройные инте-

гралы, как и двойные, имеют широкое применение в различных физических и геометрических задачах.

1. Определение тройного интеграла. Тройной интеграл является аналогом двойного интеграла и вводится для функции трех переменных.

Пусть в некоторой замкнутой ограниченной области V трехмерного пространства задана ограниченная функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем область V на n произвольных областей, не имеющих общих внутренних точек, с объемами $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. В каждой области возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i \quad (1)$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y, z)$ по области V . Обозначим через λ наибольший из диаметров частных областей.

Определение. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется *тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V* и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой в области V* ; V — *областью интегрирования*; x, y и z — *переменными интегрирования*; dv (или $dx dy dz$) — *элементом объема*.

В дальнейшем, поскольку результаты, полученные для двойных интегралов, вместе с их доказательствами могут быть перенесены на тройные интегралы, ограничимся только формулировками утверждений и краткими пояснениями.

Тройные интегралы являются непосредственным обобщением двойных интегралов на случай трехмерного пространства. Они обладают аналогичными двойным интегралам необходимыми и достаточными условиями существования и свойствами. Если положить всюду в области V $f(x, y, z) \equiv 1$, то из определения тройного интеграла следует формула для вычисления объема тела V :

$$v = \iiint_V dv = \iiint_V dx dy dz.$$

2. Вычисление тройных интегралов. Как и в случае двойных интегралов, вычисление тройных интегралов сводится к вычислению интегралов меньшей кратности.

Рассмотрим область V , ограниченную снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, а с боковых сторон цилиндрической поверхностью, и пусть область G — проекция области V на плоскость Oxy (рис. 194), в которой определены и непрерывны функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$. Предположим, далее, что каждая

прямая, параллельная оси Oz , пересекает границу области V не более чем в двух точках. Тогда для любой функции $f(x, y, z)$, непрерывной в области V , имеет место формула

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

позволяющая свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G .

Выражение

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области G , по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы 13.4, то, переходя от двойного интеграла

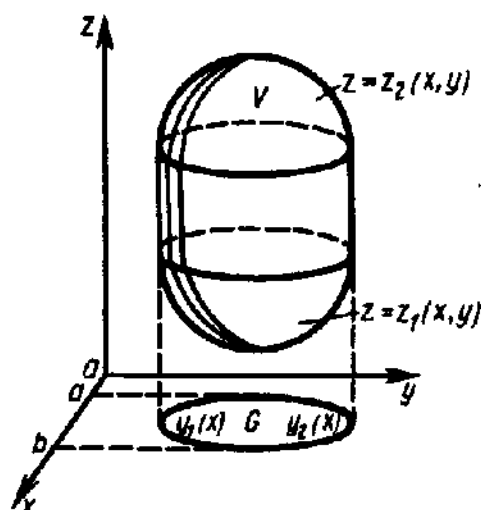


Рис. 194

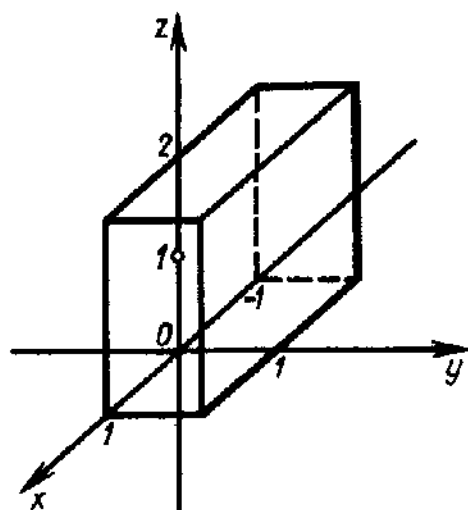


Рис. 195

$\iint_G I(x, y) dx dy$ к повторному, получаем формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (2)$$

сводящую вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов. Порядок интегрирования может быть и другим, т. е. переменные x, y и z в формуле (2) можно менять ролями.

В частности, если V — параллелепипед с гранями $x=a$, $x=b$ ($a < b$), $y=c$, $y=d$ ($c < d$), $z=k$, $z=l$ ($k < l$), то формула (2) принимает вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z) dz. \quad (3)$$

В этом случае интегрирование можно производить в любом порядке.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y-z) dx dy dz$, где V — параллелепипед, ограниченный плоскостями $x=-1$, $x=+1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$ (рис. 195).

Решение. По формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V (x+y-z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z) dz = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 \left[xz + yz - \frac{z^2}{2} \right]_0^2 dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (2x + 2y - 2) dy = \\ &= \int_{-1}^1 [2xy + y^2 - 2y]_0^1 dx = \int_{-1}^1 (2x - 1) dx = [x^2 - x]_{-1}^1 = -2. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y+z) dx dy dz$, где V — пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рис. 196).

Решение. Область V проектируется на плоскость Oxy в треугольник G , ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1-x$. По формуле (2) имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V (x+y+z) dx dy dz &= \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (2 - 3x + x^3) dx = \frac{1}{6} \left[2x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

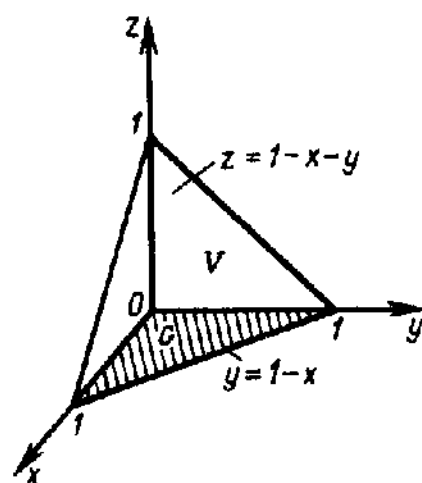


Рис. 196

3. Замена переменных в тройном интеграле. Как для двойных интегралов, так и для тройных имеют место формулы перехода от прямоугольных координат к новым системам координат, наиболее употребительными из которых являются *цилиндрические* и *сферические* координаты.

Замену переменных в тройном интеграле производят по следующему правилу.

Если ограниченная замкнутая область V пространства (x, y, z) взаимно однозначно отображается на область V^* пространства (u, v, w) с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x =$

$=x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$, $z=z(u, v, w)$ и якобиан J в области V^* не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V^*} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw. \end{aligned}$$

В частности, при переходе от прямоугольных координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис. 197), связанным с x, y, z формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \\ (0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty), \end{aligned}$$

якобиан преобразования $J = \rho$, поэтому

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (4)$$

Название «цилиндрические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $\rho = \text{const}$ (т. е. поверхность, все точки которой имеют одну и ту же координату ρ) является цилиндром, прямолинейные образующие которого параллельны оси Oz .

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ (рис. 198), связанным с x, y, z формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \\ (0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi), \end{aligned}$$

якобиан преобразования $J = \rho^2 \sin \theta$, поэтому

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V^*} f[\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta] \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Название «сферические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $\rho = \text{const}$ (т. е. поверхность, все точки которой имеют одну и ту же координату ρ) является сферой. Сферические координаты иначе называют полярными координатами в пространстве.

При вычислении тройного интеграла путем перехода к цилиндрическим или сферическим координатам область V^* обычно не изображают, а пределы интегрирования расставляют непосредственно по виду области V , используя геометрический смысл новых координат.

Пример 3. Вычислить интеграл $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ переходом к цилиндрическим координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, где V — область, ограниченная поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (рис. 199).

Решение. Так как область V на плоскость Oxy проектируется в круг $x^2 + y^2 \leq 1$, то координата φ изменяется в пределах от 0 до 2π , координата ρ — от $\rho = 0$ до $\rho = 1$. Постоянному значению ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2 + y^2 = \rho^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью V , получаем изменение координаты z от значений для точек, лежащих на параболоиде $z = x^2 + y^2$, до значений для точек, лежащих на плоскости $z = 1$, т. е. от $z = \rho^2$ до $z = 1$. Применяя формулу (4), имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 \rho^2 \cdot \rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [\rho^3 z]_{\rho^2}^1 d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Трудно дать какую-либо общую рекомендацию, когда следует применять ту или иную систему координат. Это зависит и от области интегрирования, и от вида подынтегральной функции. Однако, например, формулой (5) удобнее пользоваться, когда $f(x, y, z)$ имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$, а также когда областью V является шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ или его часть.

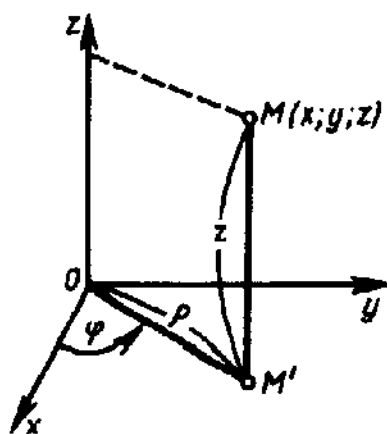


Рис. 197

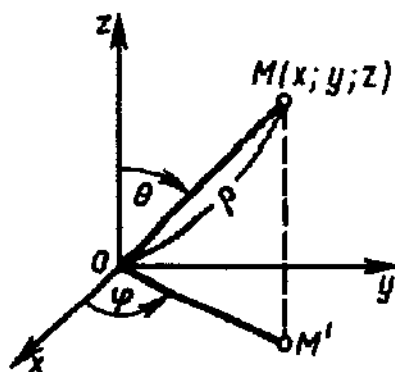


Рис. 198

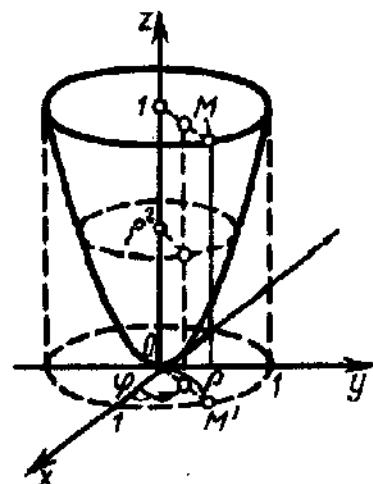


Рис. 199

Пример 4. Вычислить интеграл $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где V — шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ (рис. 200).

Решение. В данном случае удобно перейти к сферическим координатам: $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$. Из вида области V следует, что координаты ρ , φ и θ меняются в следующих пределах: ρ — от 0 до R , φ — от 0 до 2π , θ — от 0

до π . Так как подынтегральная функция

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ = \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2,$$

то по формуле (5) получаем

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho^2 \sin \theta d\varphi = \\ = \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \\ = 4\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = 4\pi \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

4. Некоторые приложения тройных интегралов. Кратко рассмотрим типичные задачи применения тройных интегралов, ограничившись приведением необходимых формул, так как их вывод аналогичен выводу соответствующих формул в случае двойных интегралов.

Если дано некоторое тело V с плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию, то тройной интеграл

$\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$ представляет собой массу m данного тела.

Моменты инерции тела V с плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ относительно осей координат определяются следующими формулами:

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(M) dv;$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(M) dv;$$

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(M) dv.$$

Момент инерции относительно начала координат

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(M) dv.$$

Координаты центра масс определяются следующими формулами:

$$x_c = \frac{\iiint_V x \rho(M) dv}{m}; \quad y_c = \frac{\iiint_V y \rho(M) dv}{m}; \quad z_c = \frac{\iiint_V z \rho(M) dv}{m},$$

где x_c, y_c, z_c — координаты центра масс, а m — масса данного тела. В частности, если рассматриваемое тело однородно, т. е. $\rho(x, y, z) = \text{const}$, то выражения для координат центра масс упро-

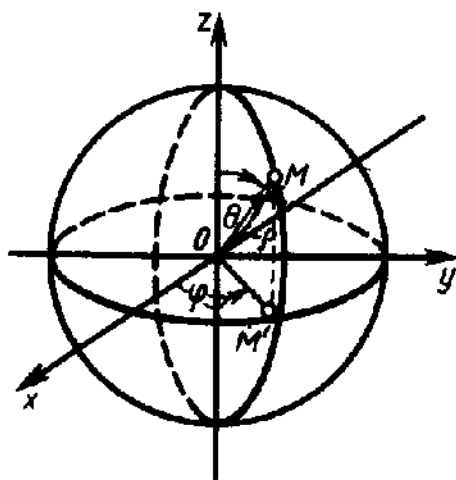


Рис. 200

щаются и принимают вид

$$x_c = \frac{\iiint_V x \, dv}{v}; \quad y_c = \frac{\iiint_V y \, dv}{v}; \quad z_c = \frac{\iiint_V z \, dv}{v},$$

где v — объем данного тела.

Как уже было отмечено, тройной интеграл $\iiint_V dx \, dy \, dz$ равен объему тела V . Тройные интегралы в некоторых случаях более удобны для вычисления объемов, чем двойные, так как с их помощью можно вычислить объем не только криволинейного цилиндра, но и других тел.

Пример 5. Определить координаты центра масс верхней половины однородного шара V радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Данный полушар ограничен поверхностями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = 0$. В силу симметрии полушара $x_c = y_c = 0$. Координата z_c определяется по формуле

$$z_c = \frac{\iiint_V z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz} = \frac{\iiint_V z \, dx \, dy \, dz}{\frac{2}{3} \pi R^3}.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^R \rho^3 \, d\rho}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

§ 11. Поверхностные интегралы

В этом параграфе рассмотрены интегралы от функций, заданных на поверхности, так называемые поверхностные интегралы.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов. Различают поверхностные интегралы первого и второго рода.

1. Определение поверхностного интеграла первого рода. Пусть в точках некоторой поверхности S гладкой или кусочно-гладкой* определена ограниченная функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S произвольно на n частей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (рис. 201). Выбрав на каждой частичной поверхности про-

* Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, которые соединены непрерывно, называется *кусочно-гладкой*.

извольную точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i \quad (1)$$

Сумма (1) называется *интегральной суммой* для функции $f(M)$ по поверхности S . Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности.

Определение. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S* и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_S f(M) dS = \iint_S f(x, y, z) dS.$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой по поверхности S* , S — *областью интегрирования*.

Данное определение по сути аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов и условия их существования без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы.

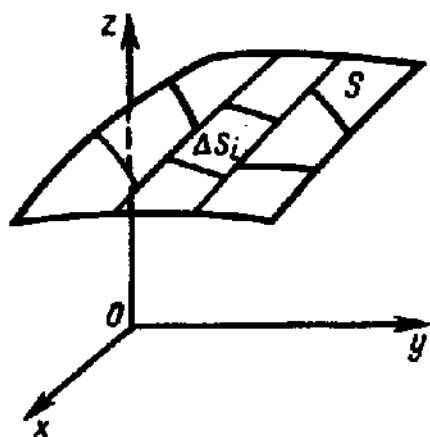


Рис. 201

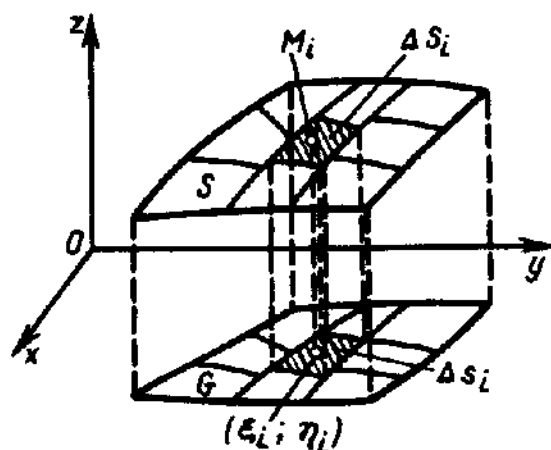


Рис. 202

В частности, если $f(x, y, z) \equiv 1$ на поверхности S , то

$$\iint_S dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = s,$$

где s — площадь поверхности S , т. е. с помощью поверхностного интеграла первого рода можно вычислять площади поверхностей.

Кроме того, с их помощью можно определять массы, статические моменты, моменты инерции, координаты центра масс и подобные величины для материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения масс. Эти задачи решаются аналогично соответствующим задачам для случая материальной кривой, материальной плоской и пространственной области.

2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода. Вычисление поверхностного интеграла первого рода производится сведением поверхностного интеграла к двойному.

Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ вместе с производными $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G — проекции S на плоскость Oxy (рис. 202), и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S и, следовательно, интегрируема по этой поверхности.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей и спроектируем это разбиение на плоскость Oxy . Получим соответственно разбиение области G на части $G_1, G_2, \dots, G_n$. Площадь ΔS_i каждой части поверхности может быть представлена в виде (см. формулу (2), п. 3, § 4)

$$\Delta S_i = \iint_{G_i} \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy.$$

Применяя к двойному интегралу теорему о среднем, получаем

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i, \eta_i) + z'^2_y(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i, \quad (2)$$

где (ξ_i, η_i) — некоторая точка области G_i ; Δs_i — площадь G_i . Обозначим через M_i точку на частичной поверхности с координатами (ξ_i, η_i, ζ_i) , где $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$, а (ξ_i, η_i) — точка, которая имеется в формуле (2). Составим интегральную сумму для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S , выбирая точки M_i в качестве промежуточных:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i &= \\ &= \sum_{i=1}^n f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] \sqrt{1 + z'^2_x(\xi_i, \eta_i) + z'^2_y(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i. \end{aligned} \quad (3)$$

В правой части равенства находится интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной в области G функции

$f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}$. Поэтому предел правой части (3) при $\lambda \rightarrow 0$ равен двойному интегралу

$$\iint_G f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy.$$

Так как функция $f(x, y, z)$ интегрируема по поверхности S , то предел левой части (3) при $\lambda \rightarrow 0$ равен поверхностному интегралу

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

Следовательно, переходя к пределу в (3) при $\lambda \rightarrow 0$, получаем искомую формулу

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy. \quad (4)$$

выражающую поверхностный интеграл первого рода через двойной по проекции поверхности S на плоскость Oxy .

Аналогично получаются формулы, выражающие интеграл по поверхности S через двойные по ее проекциям на плоскости Oyz и Oxz .

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2} dS$, где S — часть параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$, отсеченного плоскостью $z=0$ (рис. 203).

Решение. Поверхность S , заданная уравнением $z=1-x^2-y^2$, проектируется на плоскость Oxy в область G , ограниченную окружностью $x^2+y^2=1$ (уравнение окружности получается из уравнения параболоида при $z=0$). Следовательно, область G является круг $x^2+y^2 \leq 1$. В этом круге функции $z=1-x^2-y^2$, $z'_x(x, y)=-2x$, $z'_y(x, y)=2y$ непрерывны. По формуле (4) получаем

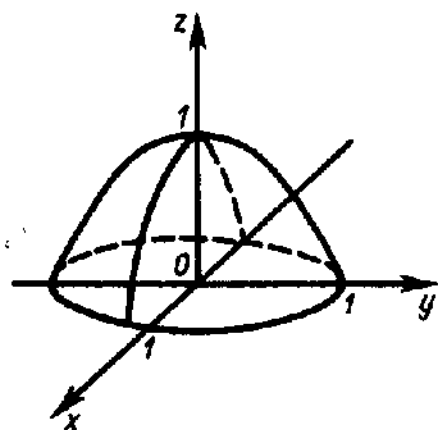


Рис. 203

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2} dS = \\ &= \iint_G \sqrt{1+4x^2+4y^2} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy = \\ &= \iint_G (1+4x^2+4y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Переходя в полученном двойном интеграле к полярным координатам $x=\rho \cos \varphi$, $y=\rho \sin \varphi$, находим

$$\begin{aligned} \iint_G (1+4x^2+4y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1+4\rho^2) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \rho^4 \right]_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

3. Определение поверхностного интеграла второго рода. Введем предварительно понятие стороны поверхности.

Возьмем на гладкой поверхности S произвольную точку M и проведем через нее нормаль к поверхности (вектор $\vec{n}$). Рассмотрим теперь на поверхности S какой-либо замкнутый контур, проходящий через точку M и не имеющий общих точек с границей поверхности S . Будем перемещать точку M по замкнутому контуру вместе с вектором $\vec{n}$ так, чтобы вектор $\vec{n}$ все время оставался нормальным к S и чтобы его направление менялось при этом перемещении непрерывно (рис. 204). В начальное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным.

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не пересекающему ее границы, при возвращении

в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней*.

Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, любая поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ — функции, непрерывные в некоторой области G плоскости Oxy .

Если же на поверхности S существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется после возвращения в исходную точку на противоположное, то поверхность называется *односторонней*.

Простейшим примером односторонней поверхности служит лист Мёбиуса*, изображенный на рис. 205. Его можно получить, взяв полоску бумаги $ABCD$ и склеив ее так, чтобы точка A совпала с точкой C , а точка B — с точкой D , т. е. повернув перед склеиванием один из ее краев на 180° . При обходе листа Мёбиуса по его средней линии и возвращении в исходную точку направление нормали меняется на противоположное.

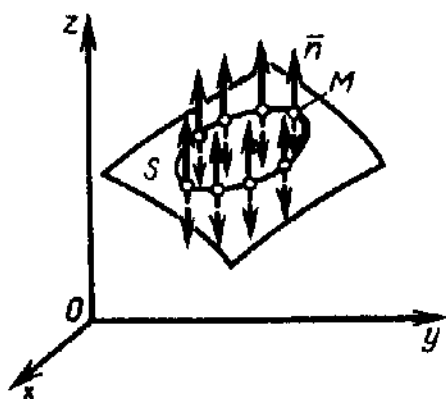


Рис. 204

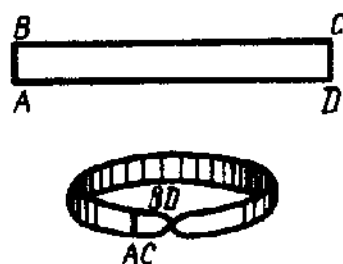


Рис. 205

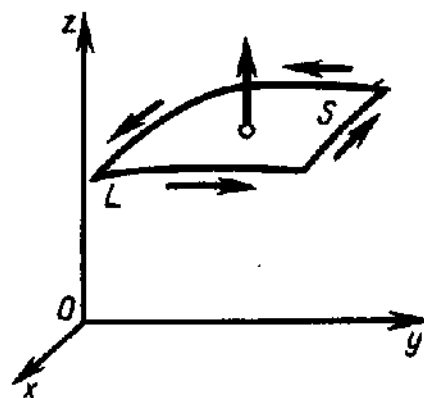


Рис. 206

В дальнейшем рассматриваются только двусторонние поверхности. Для двусторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется *стороной поверхности*, а выбор определенной ее стороны — *ориентацией поверхности*. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а одностороннюю — *неориентируемой*.

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы.

Пусть S — ориентированная (сторона уже выбрана) поверхность, ограниченная контуром L , не имеющим точек самопересечения. Будем считать *положительным* направлением обхода контура L то, при движении по которому наблюдатель, расположенный так, что направление нормали совпадает с направлением от ног к голове, оставляет поверхность слева от себя (рис. 206). Противоположное направление обхода называется *отрицательным*. Если изменить ориентацию поверхности, т. е. изменить на-

* Мёбиус Август Фердинанд (1790—1868) — немецкий математик.

правление нормали на противоположное, то положительное и отрицательное направления обхода контура L поменяются ролями.

Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла второго рода.

Пусть S — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, и $R(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная в точках поверхности S . Выберем одну из двух сторон поверхности, т. е. одно из двух возможных направлений нормали в точках поверхности (тем самым мы ориентировали поверхность). Если нормали составляют острые углы с осью Oz , то будем говорить, что выбрана *верхняя сторона* поверхности $z = f(x, y)$, если тупые углы, то *нижняя сторона* поверхности. Разобьем поверхность S произвольно на n частей и обозначим через G_i проекцию i -й части поверхности на плоскость Oxy . Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta s_i \quad (5)$$

где Δs_i — площадь G_i , взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности S , и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности S . Сумма (5) называется *интегральной суммой* для функции $R(M) = R(x, y, z)$. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности S .

Определение. Если интегральная сумма (5) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется *поверхностным интегралом второго рода от функции $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S* и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_S R(M) dx dy = \iint_S R(x, y, z) dx dy.$$

В этом случае функция $R(x, y, z)$ называется *интегрируемой по поверхности S* по переменным x и y .

Аналогично определяется поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности S по переменным y и z [z и x] от функции $P(x, y, z)$ [$Q(x, y, z)$], которая определена на поверхности S :

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz \left[\iint_S Q(x, y, z) dz dx \right].$$

Сумму

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + \iint_S Q(x, y, z) dz dx + \iint_S R(x, y, z) dx dy$$

называют *общим поверхностным интегралом второго рода* и обозначают символом

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy. \quad (6)$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает такими же свойствами, как и поверхностный интеграл первого рода, но в отличие от последнего при изменении стороны поверхности (перерасположения) он меняет знак.

К понятию поверхностного интеграла второго рода приводит, например, задача о потоке векторного поля, которая будет рассмотрена в § 14.

Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится.

4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Поверхностные интегралы второго рода вычисляются сведением их к двойным интегралам.

Пусть ориентированная (выберем верхнюю сторону) гладкая поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ определена в замкнутой области G — проекции поверхности S на плоскость Oxy , а $R(x, y, z)$ — непрерывная функция на поверхности S .

Разобьем поверхность S произвольно на n частей и спроектируем это разбиение на плоскость Oxy (рис. 07). Область G разобьется соответственно на части $G_1, G_2, \dots, G_n$. Выберем на каждой части поверхности произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$, где Δs_i — площадь G_i . Так как $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$, то

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n R[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)] \Delta s_i \quad (7)$$

В правой части равенства находится интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной в области G функции $R[x, y, f(x, y)]$. Переходя к пределу в (7) при $n \rightarrow \infty$, получаем искомую формулу

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_G R[x, y, f(x, y)] dx dy, \quad (8)$$

выражающую поверхностный интеграл второго рода по переменным x и y через двойной. Кроме того, формула (8) доказывает существование поверхностного интеграла от функции $R(x, y, z)$, непрерывной на рассматриваемой поверхности S . Если выбрать нижнюю сторону поверхности, то перед интегралом в правой части (8) появится знак минус.

Аналогично устанавливается справедливость следующих формул:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \iint_{G_1} P[f(y, z), y, z] dy dz, \quad (9)$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \iint_{G_2} Q[x, f(x, z), z] dz dx, \quad (10)$$

где поверхность S задана соответственно уравнением $x=f(y, z)$ и $y=f(x, z)$, а G_1 и G_2 — проекции поверхности S соответственно на плоскости Oyz и Oxz .

Для вычисления интеграла общего вида (6) используют те же формулы (8) — (10), если поверхность S однозначно проектируется на все три координатные плоскости. В более сложных случаях поверхность S разбивают на части, обладающие указанными свойствами, а интеграл (6) — на сумму интегралов по этим частям.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_S (y^2 + z^2) dx dy$, где S — верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1 - x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$ (рис. 208).

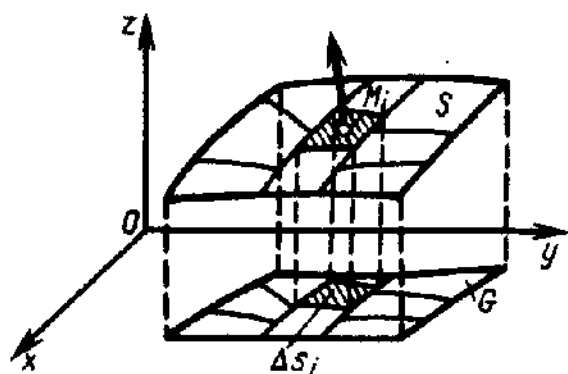


Рис. 207

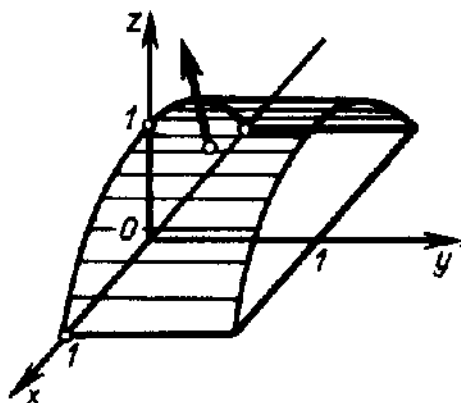


Рис. 208

Решение. Проекцией G данной поверхности на плоскость Oxy является прямоугольник, определяемый неравенствами $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. По формуле (8) находим

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + z^2) dx dy &= \iint_G [y^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2] dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (y^2 + 1 - x^2) dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{y^3}{3} + y - x^2 y \right]_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3} - x^2 \right) dx = \left[\frac{4}{3} x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где S — верхняя сторона части плоскости $x + z - 1 = 0$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=4$ и лежащая в первом октанте (рис. 209).

Решение. По определению,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \\ &= \iint_{G_1} x(y, z) dy dz + \iint_S y dz dx + \iint_{G_2} z(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Здесь G_1 и G_2 — проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxy , а

$\iint_S y dz dx = 0$, так как плоскость S параллельна оси Oy . По

формулам (8) и (9) соответственно находим

$$\iint_S z \, dx \, dy = \iint_{G_2} (1 - x) \, dx \, dy = \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - x) \, dx = 2,$$

$$\iint_S x \, dy \, dz = \iint_{G_1} (1 - z) \, dy \, dz = \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - z) \, dz = 2.$$

Следовательно,

$$\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = 2 + 0 + 2 = 4.$$

5. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Поверхностные интегралы второго рода можно ввести и другим способом, а именно как поверхностные интегралы первого рода, в которых под знаком интеграла стоят некоторые специальные выражения. Обозначим через $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ направляющие косинусы нормали ориентированной поверхности в произвольной ее точке. Поверхностные интегралы второго рода различаются своим отношением к координатным плоскостям:

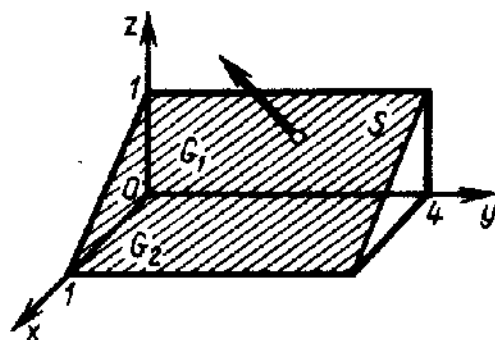


Рис. 209

1) **поверхностный интеграл второго рода для плоскости Oxy** от функции $R(x, y, z)$ выражается через поверхностный интеграл первого рода с помощью следующей формулы:

$$\iint_S R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma \, dS; \quad (11)$$

2) **поверхностный интеграл второго рода для плоскости Oxz** от функции $Q(x, y, z)$ выражается через поверхностный интеграл первого рода с помощью следующей формулы:

$$\iint_S Q(x, y, z) \, dz \, dx = \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta \, dS; \quad (12)$$

3) **поверхностный интеграл второго рода для плоскости Oyz** от функции $P(x, y, z)$ выражается через поверхностный интеграл первого рода с помощью следующей формулы:

$$\iint_S P(x, y, z) \, dy \, dz = \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha \, dS. \quad (13)$$

Суммируя формулы (11) — (13), получаем формулу, выражающую поверхностный интеграл второго рода общего вида по выбранной стороне поверхности через поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS. \quad (14)$$

Если выбрать другую сторону поверхности, то направляющие косинусы нормали $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ изменят знак и, следовательно, изменит знак поверхностный интеграл аторого рода.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint_S z \cos \gamma \, dS$, где S — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной над плоскостью Oxy , а γ — острый угол между нормалью к поверхности S с осью Oz (рис. 210).

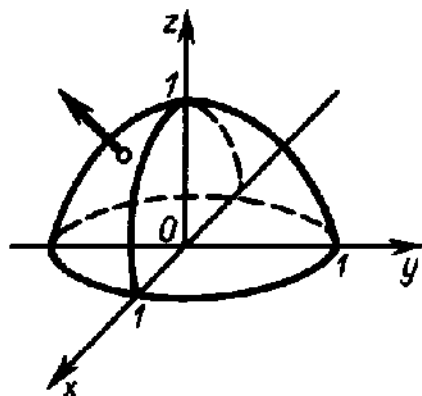


Рис. 210

Решение. По формуле (11), связывающей поверхностные интегралы обоих типов, имеем

$$\iint_S z \cos \gamma \, dS = \iint_S z \, dx \, dy.$$

Проекцией G данной поверхности S на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \leq 1$. По формуле (8) получаем

$$\iint_S z \, dx \, dy = \iint_G \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, находим

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \, \rho \, d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

§ 12. Формула Остроградского

Формула Остроградского* устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Эта формула является аналогом формулы Грина, которая, как известно, связывает криволинейный интеграл по замкнутой кривой с двойным интегралом по плоской области, ограниченной этой кривой. Формула Остроградского имеет широкое применение как в самом анализе, так и в его приложениях.

Выведем эту формулу для замкнутой пространственной области, граница которой пересекается с любой прямой, параллельной осям координат, не более чем в двух точках. Назовем для краткости такие области *простыми*. При этом будем рассматривать внешнюю сторону поверхности, ограничивающей эту область. Предполагается, что поверхность гладкая или кусочно-гладкая.

Теорема 13.8. Пусть V — простая замкнутая область, ограниченная поверхностью S и пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$

* Остроградский Михаил Васильевич (1801—1861) — выдающийся русский математик.

и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в данной области. Тогда имеет место следующая формула:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (1)$$

называемая формулой Остроградского.

Доказательство. Пусть область G — проекция поверхности S (и области V) на плоскость Oxy (рис. 211), а $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения соответствующих частей поверхности S — нижней части S_1 и верхней S_2 .

Преобразуем тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$$

в поверхностный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона—Лейбница выполним интегрирование по z . Получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_G R[x, y, z_2(x, y)] dx dy - \\ &- \iint_G R[x, y, z_1(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

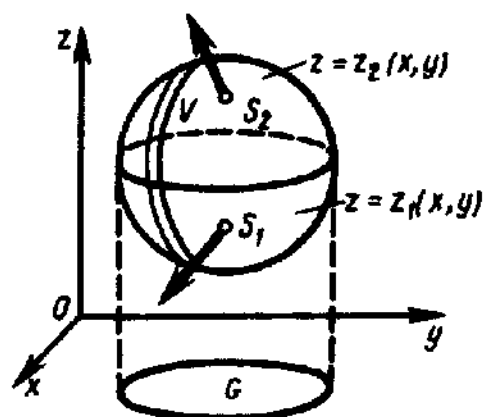


Рис. 211

Так как область G является проекцией на плоскость Oxy и поверхности S_2 , и поверхности S_1 , то двойные интегралы можно заменить равными им поверхностными интегралами [см. § 11, п. 4, формулу (8)], взятыми соответственно по верхней стороне поверхности $z = z_2(x, y)$ и верхней стороне поверхности $z = z_1(x, y)$, т. е.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy - \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy.$$

Меняя в интеграле по S_1 сторону поверхности, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \\ &+ \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy = \iint_S R dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где S — внешняя сторона поверхности, ограничивающей область V .

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P dy dz, \quad (3)$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q dz dx. \quad (4)$$

Складывая почленно равенства (2), (3), (4), приходим к формуле (1). ■

З а м е ч а н и е. Формула Остроградского верна для любой замкнутой пространственной области V , которую можно разбить на конечное число простых областей. В самом деле, применяя формулу (1) к каждой из областей разбиения и складывая результаты, получаем в левой части равенства тройной интеграл по всей области V , а в правой — поверхностный интеграл по поверхности S , ограничивающей область V , так как поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям берутся дважды по противоположным сторонам и при суммировании взаимно уничтожаются.

С помощью формулы Остроградского удобно вычислять поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$,

где S — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (см. рис. 196).

Р е ш е н и е. Используя формулу Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iiint_V (1 + 1 + 1) \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = \\ &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} dy = \\ &= 3 \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= 3 \int_0^1 \left[1 - x - x(1 - x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy$,

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Р е ш е н и е. Применяя формулу Остроградского, имеем

$$\iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

откуда, введя сферические координаты, получаем

$$3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^R \rho^4 \, d\rho = \frac{12}{5} \pi R^5.$$

Как было отмечено (§ 9, п. 1), формула Грина выражает площадь области через криволинейный интеграл по ее границе. Точно также из формулы Остроградского легко получить выражение для объема области в виде поверхностного интеграла по замкнутой поверхности S — границе этой области. Действительно, подберем функции P , Q и R так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 1.$$

Тогда получим

$$v = \iiint_V dx \, dy \, dz = \iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy,$$

где v — объем, ограниченный поверхностью S . В частности, полагая $P=x/3$, $Q=y/3$, $R=z/3$, получаем для вычисления объема формулу

$$v = \frac{1}{3} \iint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

§ 13. Формула Стокса

Формула Стокса* устанавливает связь между поверхностным и криволинейным интегралами. Подобно формулам Грина и Остроградского, формулу Стокса широко применяют как в самом анализе, так и в его приложениях.

Пусть S — поверхность, заданная уравнением $z=z(x, y)$, где функции $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ непрерывны в замкнутой области G — проекции S на плоскость Oxy ; L — контур, ограничивающий S , а l — его проекция на плоскость Oxy , являющаяся контуром, ограничивающим область G . Выберем верхнюю сторону поверхности S (рис. 212). Тогда при сделанных предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 13.9. Если функция $P(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S , то имеет место следующая формула:

$$\oint_L P(x, y, z) \, dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS, \quad (1)$$

где $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S , а контур L пробегается в положительном направлении.

Доказательство. Преобразуем криволинейный интеграл

$$\oint_L P(x, y, z) \, dx,$$

взятый по контуру L , в интеграл по поверхности S . Это преобразование проведем по следующей схеме:

$$\oint_L \rightarrow \oint_l \rightarrow \iint_G \rightarrow \iint_S,$$

т. е. криволинейный интеграл по пространственному контуру L преобразуем сначала в криволинейный интеграл по плоскому контуру l , затем переведем его в двойной интеграл по области G и, наконец, этот последний интеграл преобразуем в интеграл по поверхности S .

* Стокс Джорж Габриель (1819—1903) — английский физик и математик.

Так как контур L лежит на поверхности S , то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z = z(x, y)$ и поэтому значения функции $P(x, y, z)$ в точках контура L равны значениям функции $P[x, y, z(x, y)]$ в соответствующих точках контура l , являющегося проекцией L . Проекции же соответствующих участков разбиения контуров L и l на ось Ox совпадают. Поэтому совпадают также интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода от функции P по контурам L и l , а значит, равны и интегралы:

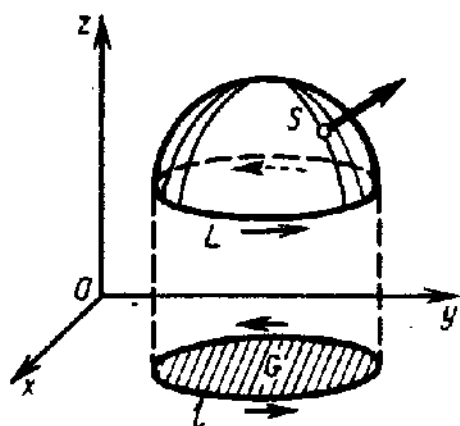


Рис. 212

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P[x, y, z(x, y)] dx.$$

Далее, применяя формулу Грина, перейдем к двойному интегралу по области G . Получаем

$$\oint_l P[x, y, z(x, y)] dx = - \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y \right) dx dy.$$

Здесь подынтегральная функция равна частной производной по y от сложной функции, получающейся из $P(x, y, z)$ после подстановки $z(x, y)$ вместо z .

Поскольку s — верхняя сторона поверхности, т. е. $\cos \gamma > 0$ (γ — острый угол между нормалью и осью Oz), нормаль имеет проекции $-z'_x$, $-z'_y$, 1. А так как направляющие косинусы нормали пропорциональны соответствующим проекциям, то

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y.$$

Поэтому

$$- \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y \right) dx dy = - \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy.$$

Теперь, воспользовавшись формулами (8) и (11) из § 11, можно этот двойной интеграл преобразовать в поверхностный. Получаем

$$- \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) dS.$$

Итак,

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS. \blacksquare$$

Аналогично доказывается при соответствующих условиях справедливость следующих двух формул:

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS, \quad (2)$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS. \quad (3)$$

Складывая почленно равенства (1), (2), (3), получаем формулу

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] dS,$$

которая называется *формулой Стокса*.

С помощью формулы, связывающей поверхностные интегралы, (14) из § 11 формулу Стокса можно переписать в следующем виде:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \quad (4)$$

Формулу Стокса легко запомнить, заметив, что первое слагаемое в правой ее части это то же самое выражение, которое стоит под знаком двойного интеграла в формуле Грина, а второе и третье получаются из него циклической перестановкой координат x, y, z и функций P, Q, R .

В частности, если поверхность S — область плоскости Oxy , ограниченная контуром L , то интегралы по $dz dx$ и $dy dz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Грина.

Формула Стокса позволяет вычислять криволинейные интегралы по замкнутым контурам с помощью поверхностных интегралов.

Пример. Вычислить с помощью формулы Стокса интеграл

$\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, где L — окружность, заданная уравнениями $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, а поверхностью S служит верхняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z > 0$) и контур L проходится в положительном направлении.

Решение. Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2; \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

то по формуле Стокса (4) получаем

$$\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz = -3 \iint_S x^2 y^2 dx dy = -\frac{\pi}{8}.$$

Из формулы Стокса следует, что если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (5)$$

то криволинейный интеграл по любой пространственной замкнутой кривой L равен нулю:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0. \quad (6)$$

А это значит, что в данном случае криволинейный интеграл не зависит от выбора пути интегрирования.

Как и в случае плоской кривой, условия (5) являются необходимыми и достаточными для выполнения равенства (6).

При выполнении условий (5) или (6) подынтегральное выражение $P dx + Q dy + R dz$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$:

$$dU = P dx + Q dy + R dz,$$

и, следовательно,

$$(x_1; y_1; z_1)$$

$$\int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x_1; y_1; z_1)} P dx + Q dy + R dz = U(x_1; y_1; z_1) - U(x_0; y_0; z_0).$$

Справедливость этого равенства устанавливается так же, как соответствующая формула (4) из § 8 для функции двух переменных.

§ 14. Скалярное и векторное поля

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Изучение теории поля выходит за рамки данного курса, поэтому ограничимся только краткими сведениями.

В общем случае говорят, что в пространстве задано поле некоторой величины u , если в каждой точке пространства (или некоторой его части) определено значение этой величины. Так, например, при изучении потока газа приходится исследовать несколько полей: температурное поле (в каждой точке температура имеет определенное значение), поле давлений, поле скоростей и т. д.

Поле величины u называется *стационарным* (или *установившимся*), если u не зависит от времени t . В противном случае поле называется *нестационарным* (или *неустановившимся*). Таким образом, величина u есть функция точки M и времени t .

В физических задачах чаще всего приходится иметь дело со скалярными и векторными величинами. В соответствии с этим различают два вида полей: *скалярные* и *векторные*. Для простоты будем считать их стационарными.

1. Скалярное поле. Пусть G — некоторая область на плоскости или в пространстве. Если в каждой точке M из G определена скалярная величина u , то говорят, что в области G задано скалярное поле. Понятия скалярного поля и функции, определенной в области G , совпадают. Обычно используют следующую терминологию: скалярное поле задается с помощью функции $u = F(M)$, которая называется *скалярной функцией*. Если в пространстве ввести систему координат $Oxyz$, то каждая точка M будет иметь определенные координаты x, y, z и скалярная величина u является функцией этих координат: $u = F(M) = F(x, y, z)$.

Примером скалярного поля может служить поле температур воздуха в некотором помещении, если температуру рассматривать как функцию точки. В точках, расположенных ближе к источнику теплоты, температура выше, дальше от источника теплоты — ниже.

Если окажется, что температура везде одинаковая, то в этом случае скалярное поле постоянно.

2. Векторное поле. Аналогично с понятием скалярного поля вводится понятие векторного поля: *если в каждой точке M из G определен вектор $\vec{F}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.* Функция $\vec{F}(M)$, с помощью которой задается векторное поле, называется *векторной функцией*.

Примером векторного поля может служить поле сил любой природы. Каждой точке области соответствует определенный вектор, имеющий числовую величину и направление силы в этой точке.

Пример 1. Найти векторное поле скоростей $\vec{v}(M)$ точек твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси.

Решение. Скорость $\vec{v}$ точки M равна векторному произведению $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M вращающегося тела относительно какой-либо точки оси вращения. Примем эту неподвижную точку оси за начало координат, а ось вращения — за ось Oz . Тогда $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и, следовательно,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} \vec{k} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

— искомое векторное поле.

3. Потенциальное поле. Введем понятие потенциального поля. Рассмотрим некоторое скалярное поле $F(M)$. Если в каждой точке M из G определен вектор $\text{grad } F$, то поле этого вектора называется *потенциальным полем*. Само скалярное поле называется при этом *потенциалом* векторного поля, а вектор, определяющий потенциальное поле, часто называют *потенциальным вектором*, т. е. вектор $\vec{a}(M)$ потенциальный, если найдется такая скалярная функция $F(M)$, что

$$\vec{a} = \text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}. \quad (1)$$

Возникает вопрос, при каких условиях данное векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальное. Фактически этот вопрос уже рассмотрен в § 7. Пусть P , Q и R — проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат Ox , Oy , Oz соответственно, т. е.

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

В силу соотношения (1) векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным, если найдется функция $F(M)$ такая, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R. \quad (2)$$

В теореме 13.7 было показано, что выражение $P dx + Q dy + R dz$ (где P , Q , R — непрерывные функции, имеющие непрерыв-

ные частные производные первого порядка) полный дифференциал некоторой функции $F(x, y, z)$ в том и только в том случае, когда P, Q, R удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (3)$$

Но если $P dx + Q dy + R dz = dF$, то справедливы и равенства (2), т. е. условие (3) как раз и означает, что данное векторное поле потенциальное. Функция $F(x, y, z)$ в этом случае называется *потенциальной функцией* поля.

Примером потенциального поля служит поле сил тяготения. Если в начале координат помещена масса m , то эта масса создает поле сил тяготения; в каждой точке M пространства на помещенную в эту точку единичную массу по закону Ньютона действует сила $\overline{F}(M)$, равная по величине $k \frac{m}{r^2}$ и направленная к началу

координат. Здесь $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат O до точки M ; k — коэффициент пропорциональности.

Пусть x, y, z — координаты точки M . Тогда проекции P, Q и R силы $\overline{F}(M)$ определяются следующим образом:

$$P = |\overline{F}| \cos \alpha = \frac{km}{r^2} \left(-\frac{x}{r} \right) = -\frac{kmx}{r^3},$$

$$Q = |\overline{F}| \cos \beta = \frac{km}{r^2} \left(-\frac{y}{r} \right) = -\frac{kmy}{r^3},$$

$$R = |\overline{F}| \cos \gamma = \frac{km}{r^2} \left(-\frac{z}{r} \right) = -\frac{kmz}{r^3},$$

где $\cos \alpha, \cos \beta$ и $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора $\overline{F}(M)$. Следовательно,

$$\overline{F}(M) = -\frac{kmx}{r^3} \overline{i} - \frac{kmy}{r^3} \overline{j} - \frac{kmz}{r^3} \overline{k}.$$

Можно проверить, что данное векторное поле потенциальное и его потенциальная функция $u(r) = \frac{km}{r}$.

В заключение найдем работу силы $\overline{F}(M)$ при перемещении единичной массы из точки $B(x_1; y_1; z_1)$ в точку $C(x_2; y_2; z_2)$.

Как известно, работа A выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_{BC} P dx + Q dy + R dz,$$

где P, Q и R — проекции силы $\overline{F}(M)$ на оси координат. Так как данное силовое поле является потенциальным, то подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, поэтому интеграл не зависит от выбора пути интегрирования и может быть вычислен по формуле

$$A = \int_B^C P dx + Q dy + R dz = u(C) - u(B),$$

т. е. работа силы $\overline{F}(M)$ равна разности значений потенциальной функции в точках C и B . В данном случае

$$A = u(r_2) - u(r_1) = \frac{km}{r_2} - \frac{km}{r_1} = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния точек B и C от начала координат.

Заметим, что областью, в которой определено поле сил тяготения, является все пространство, за исключением начала координат.

4. Задача о потоке векторного поля. Пусть в пространстве задано векторное поле $\overline{v}(M)$ скоростей жидкости, т. е. пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x; y; z)$ задается вектором

$$\overline{v}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

где P , Q и R — проекции скорости на оси координат. Пусть P , Q и R — непрерывные функции координат. Вычислим количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность S , ограниченную пространственной кривой L , считая плотность жидкости $\rho = 1$.

Пусть

$$\overline{n} = \cos \alpha \overline{i} + \cos \beta \overline{j} + \cos \gamma \overline{k}$$

— единичный вектор нормали к поверхности S , и пусть его направляющие косинусы являются непрерывными функциями координат x , y , z точек данной поверхности.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ и в каждой из них выберем точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$. Найдем количество Π_i жидкости, протекающей за единицу времени через i -ю часть поверхности (рис. 213). Обозначим через φ угол между векторами $\overline{n}_i = \overline{n}(M_i)$ и $\overline{v}_i = \overline{v}(M_i)$. Если этот угол острый, т. е. жидкость течет в «ту сторону», куда указывает нормаль $\overline{n}_i$, то величину Π_i будем считать положительной, а если угол тупой, т. е. жидкость течет в «обратную сторону», — отрицательной.

Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности S скорость $\overline{v}$ во всех точках i -й части постоянна и равна $\overline{v}(M_i)$, а частичные поверхности — плоские. Тогда величина Π_i приближенно равна взятому с соответствующим знаком объему цилиндра с площадью основания ΔS_i и высотой, равной модулю проекции вектора $\overline{v}_i$ на нормаль $\overline{n}_i$, т. е. $\Pi_i \approx \Delta S_i h$, где h — указанная проекция. А так как $h = |\overline{v}_i| \cos \varphi = |\overline{v}_i| |\overline{n}_i| \cos \varphi = (\overline{v}_i \cdot \overline{n}_i)$, то

$$\Pi_i \approx (\overline{v}_i \cdot \overline{n}_i) \Delta S_i.$$

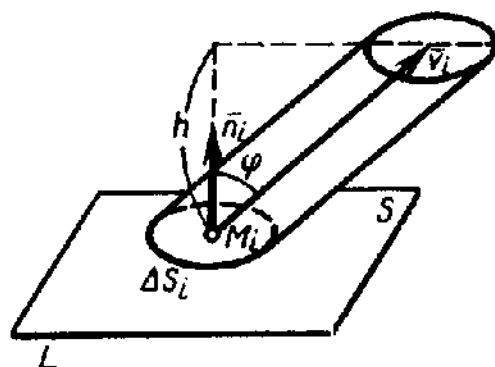


Рис. 213

Суммируя по i от 1 до n , получаем приближенное значение количества Π жидкости, протекающей через ориентированную поверхность S за единицу времени:

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^n (\overline{v}_i \cdot \overline{n}_i) \Delta S_i$$

Сумма справа является интегральной суммой для функции $(\overline{v} \cdot \overline{n})$. Так как проекции P, Q, R вектора $\overline{v}$ и направляющие косинусы вектора $\overline{n}$ — непрерывные функции координат x, y, z точек поверхности S , то скалярное произведение $\overline{v} \cdot \overline{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ непрерывная функция. Следовательно, предел этой суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частей поверхности существует и равен поверхностному интегралу первого рода по поверхности S от функции $(\overline{v} \cdot \overline{n})$. Переходя к пределу, получаем точное значение Π :

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\overline{v}_i \cdot \overline{n}_i) \Delta S_i = \iint_S (\overline{v} \cdot \overline{n}) dS,$$

или, выражая скалярное произведение через координаты векторов,

$$\Pi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Воспользовавшись формулой (14) из § 11, связывающей поверхностные интегралы первого и второго рода, окончательно имеем

$$\Pi = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (4)$$

Таким образом, количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через ориентированную поверхность S , представляет собой поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности.

Для произвольного векторного поля $\overline{v}(M)$ поверхностный интеграл второго рода (4) называется *поток вектора $\overline{v}(M)$* [или *поток векторного поля $\overline{v}(M)$*] через поверхность S . Для векторного поля иной природы, чем в рассмотренном примере, поток, разумеется, имеет другой физический смысл.

Б. Дивергенция. Пусть в некоторой области V , ограниченной поверхностью S , задано векторное поле $\overline{a}(M) = \{P; Q; R\}$, такое, что функции $P(M), Q(M), R(M)$ непрерывны в V вместе с частными производными.

Определение 1. Дивергенцией векторного поля $\overline{a}(M)$ называется скалярная функция $\operatorname{div} \overline{a}(M)$, определяемая равенством

$$\operatorname{div} \overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (5)$$

Используя выражение для дивергенции и понятие потока вектора через поверхность, формулу Остроградского (см. формулу (1), § 12) можно записать в более компактной векторной форме. По-

верхностный интеграл в формуле Остроградского представляет собой поток вектора $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ через поверхность S :

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS.$$

Используя это выражение и формулу (5), запишем формулу Остроградского в виде

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dv. \quad (6)$$

Таким образом, поток вектора $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от дивергенции поля $\vec{a}(M)$, взятому по области, ограниченной поверхностью S .

Покажем, что дивергенция не зависит от выбора системы координат, хотя ее определение и было с ней связано. Для этого возьмем произвольную точку M , заключим ее в область V , ограниченную поверхностью S , и применим к области V формулу Остроградского. Далее, используя теорему о среднем для тройного интеграла, получаем

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \operatorname{div} \vec{a}(M_0) v,$$

где M_0 — некоторая точка области V ; v — объем области V . Отсюда

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{v}.$$

Будем теперь стягивать область V в точку M . При этом $v \rightarrow 0$, $M_0 \rightarrow M$, и мы получаем

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{v}, \quad (7)$$

т. е. дивергенция векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M является пределом отношения потока вектора $\vec{a}(M)$ через поверхность S , окружающую точку M , к объему области. А так как поток и объем не зависят от выбора системы координат, то и дивергенция также не зависит от выбора системы координат, что и требовалось показать.

Выясним теперь с помощью формулы (7) физический смысл дивергенции. Для этого будем рассматривать векторное поле $\vec{a}(M)$ как поле скоростей жидкости с плотностью $\rho = 1$. Как установлено в п. 4, поток

$$\Pi = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

вектора $\vec{a}(M)$ равен количеству жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность S в направлении нормали $\vec{n}$. Пусть $\vec{n}$ — внешняя нормаль. Поскольку S — замкнутая поверх-

ность, то, очевидно, поток вектора $\vec{a}$ (M) равен количеству жидкости, которое за единицу времени возникает или уничтожается в пределах области V , ограниченной поверхностью S . Назовем это количество *суммарной мощностью источников* (если $\Pi > 0$) или *стоков* (если $\Pi < 0$), расположенных в области V . Рассмотрим отношение

$$\frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V}.$$

Оно представляет собой среднюю плотность источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающей (или исчезающей) за единицу времени в единице объема области V , а предел

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V}$$

при условии, что область V стягивается в точку M , можно назвать *плотностью источников* (или *стоков*) в точке M . Но этот предел равен $\text{div } \vec{a}$ (M). Таким образом, дивергенция векторного поля скоростей характеризует плотность источников жидкости.

Если $\text{div } \vec{a}$ (M) > 0 , то, как следует из формулы (6), $\Pi > 0$, т. е. внутри области V имеются источники жидкости и из нее вытекает жидкости больше, чем втекает; если $\text{div } \vec{a}$ (M) < 0 , то $\Pi < 0$, т. е. внутри области V имеются стоки жидкости и в нее втекает жидкости больше, чем вытекает. Если же $\text{div } \vec{a}$ (M) $= 0$, то $\Pi = 0$, т. е. внутри области V нет ни стоков, ни источников и в нее втекает столько же жидкости, сколько и вытекает. Это, например, имеет место для любой области V , расположенной в потоке воды, текущей в реке.

Для произвольного векторного поля $\text{div } \vec{a}$ (M) имеет аналогичный физический смысл: дивергенция характеризует плотность источников поля.

Векторное поле $\vec{a}$ (M) называется *соленоидальным* (или *трубчатым*), если в каждой его точке $\text{div } \vec{a}$ (M) $= 0$. Примером такого поля служит, как было показано выше, поле скоростей жидкости при отсутствии стоков и источников.

Пример 2. Вычислить дивергенцию поля скоростей $\vec{v}$ (M) $= -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz .

Решение. Здесь $P = -\omega y$, $Q = \omega x$, $R = 0$. Поэтому

$$\text{div } \vec{v} (M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial (\omega x)}{\partial y} = 0,$$

т. е. данное векторное поле является соленоидальным.

6. Циркуляция. Ротор. Пусть снова в некоторой области задано векторное поле

$$\vec{a} (M) = P (M) \vec{i} + Q (M) \vec{j} + R (M) \vec{k}$$

и L — гладкая или кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Выберем на кривой L одно из двух направлений движения и обозначим через $d\vec{l}$ вектор, имеющий в каждой точке направление, совпадающее с направлением движения по кривой в этой точке, и по модулю равный дифференциалу длины дуги:

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Тогда криволинейный интеграл от скалярного произведения векторов $\vec{a}(M)$ и $d\vec{l}$

$$\int_L \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = \int_L P dx + Q dy + R dz$$

называется *циркуляцией векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой L* . В силовом поле циркуляция выражает работу силового поля при перемещении материальной точки вдоль пути L . Для полей другой природы циркуляция имеет иной физический смысл.

Определение 2. Ротором векторного поля $\vec{a}(M)$ называется вектор $\text{rot } \vec{a}(M)$, определяемый равенством

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

С помощью понятий ротора и циркуляции формулу Стокса

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

можно записать в компактной векторной форме

$$\oint_L \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_S [\text{rot } \vec{a}(M) \cdot \vec{n}] dS.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность S , ограниченную контуром L .

Так же как и для дивергенции, можно показать, что $\text{rot } \vec{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат, а определяется только самим векторным полем $\vec{a}(M)$.

Пример 3. Вычислить ротор поля скоростей $\vec{v}(M) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ твердого тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz .

Решение. Используя определение ротора, получаем

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial (\omega x)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial (-\omega y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ + \left(\frac{\partial (\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial (-\omega y)}{\partial y} \right) \vec{k} = 2\omega \vec{k},$$

т. е. ротор данного векторного поля направлен по оси вращения Oz , а по модулю равен удвоенной угловой скорости.

Понятие ротора непосредственно связано с понятием потенциального поля. Было показано, что векторное поле $\overline{a}(M) = \{P; Q; R\}$ потенциальное в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Но это означает, равенство нулю всех трех координат ротора поля $\overline{a}(M)$, т. е. для того чтобы векторное поле $\overline{a}(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rot } \overline{a}(M) \equiv 0.$$

7. Оператор Гамильтона. Основные понятия теории поля: градиент, дивергенция, ротор и операции над ними удобно представлять с помощью оператора Гамильтона*, или оператора «набла»:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{k}.$$

Оператор ∇ будем рассматривать как символический вектор с координатами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, а операции с ним проводить по правилам векторной алгебры. При этом под произведением $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ на скалярную функцию будем понимать частную производную этой функции соответственно по x , y и z .

Примеры.

1. Пусть $u(x, y, z)$ — скалярная функция. Тогда произведение оператора ∇ на функцию u дает градиент этой функции:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \overline{k} = \text{grad } u.$$

2. Пусть $\overline{a}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ — вектор-функция. Тогда скалярное произведение оператора ∇ на вектор-функцию $\overline{a}(M)$ дает дивергенцию этой функции

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{a}(M) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{k} \right) \cdot (P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \overline{a}(M). \end{aligned}$$

3. Векторное произведение оператора ∇ на вектор-функцию $\overline{a}(M)$ дает ротор этой функции

$$\begin{aligned} \nabla \times \overline{a}(M) &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \overline{k} = \text{rot } \overline{a}(M). \end{aligned}$$

* Гамильтон Уильям Роуан (1805—1865) — английский математик.

В приложениях часто встречаются так называемые операции второго порядка, т. е. попарные комбинации трех указанных выше операций. Рассмотрим наиболее важные из них.

1°. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} (M) = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} (M) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

в силу равенства смешанных производных второго порядка. Этот же результат легко получить с помощью оператора ∇ :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{a} (M) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}) = 0,$$

так как здесь имеем смешанное произведение трех «векторов»: ∇ , ∇ , $\bar{a}$, два из которых одинаковы. Такое произведение, очевидно, равно нулю.

2°. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} u &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \bar{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \bar{j} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \bar{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \bar{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \bar{k} = 0 \end{aligned}$$

в силу равенства смешанных производных второго порядка. Этот же результат легко получить с помощью оператора ∇ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla) u = 0,$$

так как векторное произведение одинаковых «векторов» равно нулю.

3°. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Действительно,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Правая часть равенства (8) символически обозначается так:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ или } \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u.$$

Символ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа**. Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат «вектора» ∇ . В самом деле,

$$(\nabla \cdot \nabla) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \Delta.$$

* Лаплас Пьер Симон (1749—1827) — французский математик и физик.

Поэтому равенство (8) с помощью оператора ∇ записывается в виде

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u$$

Отметим, что уравнение

$$\Delta u = 0$$

называется *уравнением Лапласа*. С его помощью описываются стационарные процессы различной физической природы, например: стационарное распределение теплоты, электростатическое поле точечных зарядов, установившееся движение несжимаемой жидкости внутри некоторой области и т. д. Скалярное поле $u(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u = 0$, называется *лапласовым*, или *гармоническим, полем*.

РЯДЫ

В настоящей главе будут рассмотрены ряды, являющиеся важным математическим аппаратом, применяемым для вычислений и исследований как в различных разделах самой математики, так и во многих ее приложениях.

§ 1. Понятие числового ряда

1. Основные определения. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется *числовым рядом* или *просто рядом*.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, член a_n с произвольным номером — *общим членом ряда*.

Суммы конечного числа членов ряда

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$$

называются *частичными суммами ряда* (1). Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \quad (2)$$

Ряд (1) называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм (2) сходится к какому-нибудь числу S , которое в этом случае называется *суммой ряда* (1). Символически это записывается так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же последовательность частичных сумм (2) расходится, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Пример 1. Покажем, что ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится. Возьмем сумму S_n первых n членов ряда

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Слагаемые этой суммы могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \dots; \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм данного ряда равен единице:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, и его сумма S равна 1.

Пример 2. Установим, сходится или расходится ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Последовательность его частичных сумм имеет вид $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0$, ... и, значит, не сходится ни к какому пределу, поэтому данный ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad a \neq 0. \quad (3)$$

Частичная сумма S_n этого ряда при $q \neq 1$ имеет вид

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Отсюда:

$$1) \text{ если } |q| < 1, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}, \text{ т. е.}$$

ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1 - q}$. Например, при $a=1$, $q=1/2$ имеем:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2;$$

2) если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty$, т. е. ряд расходится;

3) при $q=1$ ряд (3) принимает вид $a + a + a + \dots + a + \dots$

В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(a + a + a + \dots + a)}_{n \text{ раз}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a = \infty$, т. е. ряд расходится;

4) при $q = -1$ ряд (3) принимает вид $a - a + a - a + \dots$. Для него $S_n = \frac{a}{2} - \frac{a(-1)^n}{2}$, т. е. $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд (3) является сходящимся при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geq 1$.

2. Свойства сходящихся рядов. Теорема 14.1. Если сходится ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (4)$$

то сходится и ряд

$$a_{k+1} + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \quad (5)$$

и обратно, если сходится ряд (5), то сходится и ряд (4).

Другими словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Доказательство. Пусть ряд (4) сходится и имеет сумму S , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Обозначим через S_k сумму отброшенных членов ряда (4), а через σ_{n-k} сумму $n-k$ первых членов ряда (5). Тогда

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}, \quad (6)$$

где S_k — некоторое число, не зависящее от n . Из равенства (6) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_k = S - S_k,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{\sigma_{n-k}\}$ ряда (5) имеет предел, что означает сходимость ряда (5).

Пусть теперь ряд (5) сходится и имеет сумму σ , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = \sigma$. Тогда из (6) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma,$$

что означает сходимость ряда (4). ■

Над сходящимися рядами можно выполнять обычные арифметические действия.

Теорема 14.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S ,

то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, где c — некоторое число, также сходится, и его сумма равна cS

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

а σ_n — частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тогда

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = cS_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = cS,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{\sigma_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится к cS . Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cS. \blacksquare$$

Теорема 14.3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S и σ , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится и его сумма равна $S \pm \sigma$.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а τ_n — частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = S_n \pm \sigma_n. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma,$$

т. е. последовательность частичных сумм $\{\tau_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$

сходится к $S \pm \sigma$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S \pm \sigma. \blacksquare$

Таким образом, установлено, что сходящиеся ряды можно умножать на число, почленно складывать и вычитать так же, как и конечные суммы.

3. Необходимое условие сходимости ряда. При рассмотрении рядов возникают две задачи: 1) исследовать ряд на сходимость и 2) зная, что ряд сходится, найти его сумму. Будем решать в основном первую задачу, имеющую теоретический характер. Приведем необходимое условие сходимости рядов.

Теорема 14.4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член

стремится к нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Обозначим через S его сумму. Рассмотрим частичные суммы ряда $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ и $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. Отсюда $a_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \blacksquare$$

Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда.

Пример. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который называют *гармоническим рядом*. Очевидно, что для гармонического ряда выполнено необходимое условие сходимости, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Докажем, что этот ряд расходится.

Действительно, если бы этот ряд сходил, то, обозначая его сумму через S , мы бы имели

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

т. е. $S_{2n} - S_n > 1/2$. Отсюда следует, что равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно, т. е. гармонический ряд расходится.

Таким образом, если общий член ряда стремится к нулю, то еще нельзя сделать вывод о сходимости ряда. Необходимо дополнительное исследование, которое может быть проведено с помощью достаточных условий (признаков) сходимости ряда.

Если же для некоторого ряда его общий член не стремится к нулю, то теорема 14.4 позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.

§ 2. Ряды с неотрицательными членами

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых достаточных условий сходимости рядов с неотрицательными членами. Предварительно докажем теорему, которая будет использована в последующих рассуждениях.

Теорема 14.5. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами сходил, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится. Это значит, что последовательность его частичных сумм имеет предел. В силу теоремы 2.6 всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность: $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$. В силу теоремы 2.12 о монотонных ограниченных последовательностях она сходится, т. е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Достаточные условия сходимости ряда. Установим ряд признаков, позволяющих сделать вывод о сходимости (расходимости) рассматриваемого ряда.

Признак сравнения.

Теорема 14.6. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство

$a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Из неравенства $a_n \leq b_n$ следует, что

$$S_n \leq \sigma_n. \quad (7)$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по теореме 14.5 (необходимость) последовательность его частичных сумм ограничена, т. е. для любого n $\sigma_n \leq M$, где M — некоторое число. Но тогда по формуле (7) и $S_n \leq M$, откуда по той же теореме 14.5 (достаточность) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, так как, допустив сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, получим по

только что доказанному сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а это противоречит условию теоремы. ■

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ сходится, так как сходится ряд из членов геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ ($q = \frac{1}{2} < 1$), а члены данного ряда не больше соответствующих членов ряда сходящейся геометрической прогрессии: $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s \leq 1$) расходится, поскольку его члены не меньше членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s}$, а гармонический ряд расходится.

Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно судить о сходимости (или расходимости) данного ряда, не сравнивая его с другим рядом, о котором известно, сходится он или расходится. Рассмотрим два из них.

Признак Даламбера*.

Теорема 14.7. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Тогда а) при $\rho < 1$ ряд сходится; б) при $\rho > 1$ ряд расходится.

Доказательство. а) Пусть $\rho < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon. \quad (8)$$

Так как $\rho < 1$, то ε можно взять настолько малым, что будет выполнено неравенство $\rho + \varepsilon < 1$. Полагая $\rho + \varepsilon = q$, на основании правого из неравенств (8) имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \text{ или } a_{n+1} < a_n q$$

* Даламбер Жан Лерон (1717—1783) — французский математик, механик и философ-просветитель.

для $n = N, N+1, N+2, \dots$. Придавая n эти значения, из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< a_N q, \\ a_{N+2} &< a_{N+1} q < a_N q^2, \\ a_{N+3} &< a_{N+2} q < a_N q^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

т. е. члены ряда

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots \quad (9)$$

меньше соответствующих членов ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии:

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \dots \quad (10)$$

Так как $q < 1$, то ряд (10) сходится (см. пример 3 из § 1). Тогда согласно признаку сравнения ряд (9) также сходится. Но ряд (9)

получен из данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в результате отбрасывания конечного числа первых членов, следовательно, по теореме 14.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

б) Пусть теперь $\rho > 1$. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Возьмем ε настолько малым, чтобы $\rho - \varepsilon > 1$. Тогда при $n \geq N$ в силу левого из неравенств (8) выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

или $a_{n+1} > a_n$. Таким образом, члены ряда, начиная с некоторого номера N , возрастают с увеличением их номеров, т. е. общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

согласно теореме 14.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ■

З а м е ч а н и е. При $\rho = 1$, как показывают примеры, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$. Согласно признаку Даламбера сделать заклю-

чение о сходимости или расходимости ряда нельзя. Однако, как было показано ранее (см. пример 2), этот ряд расходится.

Интегральный признак.

Теорема 14.8. Пусть дан ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1, +\infty)$. Тогда, если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$; если же $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y=f(x)$, с боковых сторон прямыми $x=1$, $x=n$, снизу осью Ox . Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[n-1, n]$ и высотами $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n-1)$, $f(n)$ (рис. 214). Тогда, принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, имеем

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x) dx < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1),$$

или, короче,

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x) dx < S_n - f(n).$$

Отсюда получаем

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x) dx, \quad (11)$$

$$S_n > f(n) + \int_1^n f(x) dx, \quad (12)$$

где S_n — частичные суммы рассматриваемого ряда.

Пусть интеграл $\int_1^n f(x) dx$ сходится. Это значит, что существует

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = I$. Так как $f(x) > 0$, то последовательность $\int_1^n f(x) dx$ возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом:

$\int_1^n f(x) dx < I$. Из неравенства (11) следует, что $S_n < f(1) + I$, т. е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ограничена. По теореме 14.5 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

Пусть теперь интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится. В этом случае

$\int_1^n f(x) dx \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ (как монотонно возрастающая неограниченная последовательность). Из неравенства (12) следует, что $S_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится и, следовательно, ряд расходится. ■

Пример 6. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

($\alpha > 0$). С помощью интегрального признака выясним поведение данного ряда при $\alpha > 0$. Возьмем в качестве функции $f(x)$ функцию $\frac{1}{x^\alpha}$ ($x \geq 1$), которая удовлетворяет условиям теоремы 14.8. Члены ряда равны значениям этой функции при $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Как известно (см. гл. 8, § 11, п. 1, пример 4), несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Заметим, что при $\alpha \leq 0$ такие ряды также расходятся, так как их общий член не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. нарушается необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 14.4).

В частности, при $\alpha = 2$ имеем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; при

$\alpha = 1$ — расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; при $\alpha = \frac{1}{2}$ — рас-

ходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и т. д.

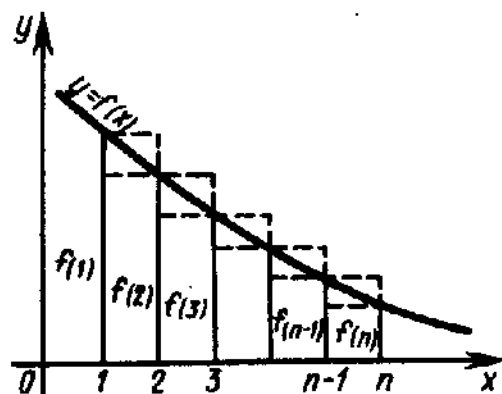


Рис. 214

§ 3. Знакопередающиеся ряды

До сих пор мы рассматривали ряды с неотрицательными членами. Ряды с неположительными членами отличаются от соответствующих рядов с неотрицательными членами только множителем -1 , поэтому вопрос о их сходимости решается аналогично.

Перейдем теперь к рассмотрению знакопередающихся рядов, члены которых имеют чередующиеся знаки. Для удобства будем считать, что первый член такого ряда положителен. Тогда знакопередающийся ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \quad (1)$$

где $a_n > 0$.

Для знакопередающихся рядов имеет место следующий очень простой достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница.

Теорема 14.9. Если абсолютные величины членов знакопередающегося ряда (1) монотонно убывают: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Доказательство. Пусть дан ряд (1) и пусть $a_n > a_{n+1}$ и $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим частичную сумму ряда с четным числом членов

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned}$$

Все разности в скобках в силу первого условия положительны, поэтому последовательность частичных сумм $\{S_{2n}\}$ является возрастающей. Докажем, что она ограничена. Для этого представим S_{2n} в виде

$$S_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}].$$

Отсюда следует, что $S_{2n} < a_1$ для любого n , т. е. $\{S_{2n}\}$ ограничена.

Итак, последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастающая и ограниченная, следовательно, она имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$.

Покажем теперь, что и последовательность частичных сумм нечетного числа членов сходится к тому же пределу S . Действительно, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ и используя второе условие ($a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (1) сходится к пределу S . Это и означает, что ряд (1) сходится. ■

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Заметим, что этот ряд отличается от гармонического ряда только знаками четных членов.

§ 4. Абсолютная и условная сходимость рядов

Рассмотрим теперь ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными рядами*.

Возьмем какой-нибудь знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов в ряде произвольно. Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2)$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема 14.10. Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

Доказательство. Пусть ряд (2) сходится. Обозначим через S_n частичную сумму ряда (1), а через σ_n частичную сумму ряда (2): $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$; $\sigma_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$. Так как ряд (2) сходится, то последовательность его частичных сумм $\{\sigma_n\}$ имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, при этом для любого n имеет место неравенство

$$\sigma_n \leq \sigma, \quad (3)$$

поскольку члены ряда (2) неотрицательны.

Обозначим через S'_n сумму положительных членов, а через S''_n сумму модулей отрицательных членов, содержащихся в сумме S_n . Тогда

$$S_n = S'_n - S''_n \quad (4)$$

$$\sigma_n = S'_n + S''_n \quad (5)$$

Очевидно, последовательности $\{S'_n\}$ и $\{S''_n\}$ не убывают, а из равенства (5) и неравенства (3) следует, что они являются ограниченными: $S'_n \leq \sigma_n \leq \sigma$ и $S''_n \leq \sigma_n \leq \sigma$. Следовательно, существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$. Но в таком случае, в силу равенства (4), последовательность частичных сумм ряда (1) имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n - S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S' - S''.$$

Это означает, что ряд (1) сходится. ■

Пример 1. Ряд $1 - 1/2^2 - 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 - 1/6^2 - 1/7^2 + \dots$ согласно доказанному признаку сходится, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \dots$ (см. пример 6 из § 2).

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. Так, например, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ согласно признаку Лейбница сходится (см. пример

из § 3), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (гармонический ряд).

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на *абсолютно* и *условно сходящиеся*.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Пример 2. Ряд $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - 1/32 + \dots$ абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из абсолютных величин $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$, также сходится. (Оба ряда — геометрические прогрессии со знаменателями, соответственно равными $-1/2$ и $1/2$).

Пример 3. Ряд $1 - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} - 1/\sqrt{4} + \dots$ условно сходящийся, так как сам он сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{4} + \dots$, расходится (см. пример 6 из § 2).

Заметим, что деление сходящихся рядов на абсолютно и условно сходящиеся существенно. Дело в том, что абсолютно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих свойств не обладают. Например, для условно сходящихся рядов сумма ряда не равна сумме положительных и сумме отрицательных членов ряда, как это имеет место для абсолютно сходящихся рядов, что было показано при доказательстве теоремы 14.10.

§ 5. Степенные ряды

1. Определение и общие замечания. Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (1)$$

называется *степенным рядом*.

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Придавая x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Множество тех значений x , при которых ряд (1) сходится, называется *областью его сходимости*. Это множество всегда не пусто, так как любой степенной ряд сходится при $x=0$.

Очевидно, что частичная сумма степенного ряда $S_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ является функцией переменной x . Поэтому и сумма ряда S также является некоторой функцией переменной x , определенной в области сходимости ряда: $S = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

(или $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$).

2. Интервал сходимости степенного ряда. Докажем теорему, имеющую важное значение в теории степенных рядов и касающуюся области сходимости степенного ряда.

Теорема 14.11 (теорема Абеля)*. 1) Если степенной ряд (1) сходится при $x=x_0$ ($x_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$; 2) если ряд (1) расходится при $x=x_1$, то он расходится для всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1) Так как по условию числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ сходится, то его общий член $a_nx_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда следует, что последовательность $\{a_nx_0^n\}$ ограничена, т. е. существует число $M > 0$ такое, что

$$|a_nx_0^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Перепишем ряд (1) в виде

$$a_0 + a_1x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + a_nx_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots \quad (3)$$

и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + |a_nx_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (4)$$

Члены ряда (4) в силу неравенства (2) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \dots \quad (5)$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (5) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно, сходится.

* Абель Нильс Хенрик (1802—1829) — норвежский математик.

Так как члены ряда (4) меньше соответствующих членов ряда (5), то, по признаку сравнения, ряд (4) также сходится, а это значит, что ряд (1) при $|x| < |x_0|$ сходится абсолютно.

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. По условию, в точке x_1 ряд (1) расходится. Требуется показать, что он расходится для всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$. Предположим обратное, т. е. допустим, что при некотором значении x таком, что $|x| > |x_1|$, ряд (1) сходится. Тогда по только что доказанной первой части теоремы ряд (1) должен сходиться и в точке x_1 , так как $|x_1| < |x|$. Но это противоречит тому, что в точке x_1 ряд расходится. ■

Теорема Абеля утверждает, что если x_0 — точка сходимости степенного ряда, то во всех точках, расположенных на интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ (рис. 215, а), этот ряд сходится абсолютно, а если x_1 — точка расходимости степенного ряда, то во всех точках, расположенных вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$ (рис. 215, б), ряд расходится.



Рис. 215

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 14.12. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится не при всех значениях x и не только при $x=0$, то существует число $R > 0$ такое, что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Доказательство. Обозначим через X множество точек x , в которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Покажем, что множество X ограничено. Действительно, если взять точку x_1 , в которой ряд расходится (по условию такие точки существуют), то по теореме Абеля для любого x из X выполняется неравенство $|x| < |x_1|$. Известно, что у ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань. Положим $R = \sup_{x \in X} |x|$. Так как ряд сходится не только при $x=0$, то $R > 0$.

Возьмем теперь любое x , для которого $|x| < R$. Согласно свойству точной верхней грани найдется $x_0 \in X$ такое, что $|x| < |x_0| \leq R$, откуда по теореме Абеля следует абсолютная сходимость ряда при взятом x .

Возьмем теперь любое x , для которого $|x| > R$. Такое $x \notin X$. Следовательно, при этом x ряд расходится. ■

Таким образом, решен вопрос об области сходимости степенного ряда. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости степенного ряда*. Число R называется *радиусом сходимости степенного ряда*.

Отметим, что интервал сходимости некоторых рядов охватывает всю числовую прямую (в этом случае пишут $R = \infty$), у других вырождается в одну точку ($R = 0$).

Итак, всякий степенной ряд имеет свой радиус сходимости R .

При $x = \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда.

Приведем способ определения радиуса сходимости степенного ряда.

Теорема 14.13. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. По условию существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$. Обозначим его через $\frac{1}{R}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{R}.$$

При каждом значении x степенной ряд становится числовым рядом. Поэтому по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится, если $\frac{|x|}{R} < 1$, т. е. $|x| < R$.

Следовательно, по теореме 14.10 о сходимости знакопеременных рядов ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ также сходится при $|x| < R$, причем абсолютно. При $|x| > R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|x|}{R} > 1$ и, следовательно, общий член ряда $a_n x^n$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, данный ряд сходится внутри интервала $(-R, R)$ и расходится вне его, т. е. радиус сходимости равен $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. ■

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на всей числовой прямой, т. е. $R = \infty$, а если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, то ряд сходится только при $x = 0$, т. е. $R = 0$.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Здесь $a_n = \frac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Поэтому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, по теореме 14.13 данный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем гармонический

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $x = -1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится

в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1, 1)$ и расходится вне его.

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ расходится на всей числовой прямой, кроме точки $x = 0$, так как его радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0.$$

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится абсолютно на всей числовой прямой, так как его радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

3. Свойства степенных рядов. Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (6)$$

интервал сходимости которого $(-R, R)$.

В этом случае говорят, что на интервале $(-R, R)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (или ряд по степеням x).

Имеют место две теоремы о свойствах степенных рядов, которые приведем без доказательства.

Теорема 14.14. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд (6), то она дифференцируема на этом интервале и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда (6), т. е.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)' = \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Аналогично могут быть вычислены производные любого порядка функции $f(x)$. При этом соответствующие ряды имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (6).

Теорема 14.15 Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд (6), то она интегрируема в интервале $(-R, R)$ и интеграл от нее может быть вычислен почленным интегрированием ряда (6), т. е. если $x_1, x_2 \in (-R, R)$, то

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} a_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1x dx + \dots + \int_{x_1}^{x_2} a_nx^n dx + \dots \end{aligned}$$

Представляет интерес интегрирование степенного ряда (6) по отрезку $[0, x]$, где $|x| < R$:

$$\int_0^x f(x) dx = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \dots$$

В этом случае опять получаем степенной ряд, который имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (6).

Сформулированные теоремы дифференцирования и интегрирования степенных рядов имеют важное значение. Далее они неоднократно используются.

Отметим, что в ряде случаев рассматриваются степенные ряды более общего вида:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n. \quad (7)$$

Ряд вида (7) приводится к виду (1) заменой переменной $x-a=t$.

Если функция $f(x)$ является суммой ряда (7), то в этом случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $(x-a)$.

Все изложенное полностью переносится и на ряды вида (7). Для простоты записи последующие рассуждения проводятся для рядов вида (1).

4. Разложение функций в степенные ряды. Как показывает следующая теорема, разложение функции в степенной ряд единственно.

Теорема 14.16 Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (8)$$

то это разложение единственно.

Доказательство. По условию ряд (8) сходится на интервале $(-R, R)$ и функция $f(x)$ — его сумма. Следовательно, на основании теоремы 14.14 ряд (8) можно почленно дифференцировать на интервале $(-R, R)$ любое число раз. Дифференцируя,

получаем

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + 4 \cdot 5a_5x^3 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots,$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1) a_{n+1}x + \dots,$$

.....

Полагая в полученных равенствах и в равенстве (8) $x=0$, имеем

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(0) = 2!a_2,$$

$$f'''(0) = 3! a_3, \dots, f^{(n)}(0) = n! a_n, \dots,$$

откуда находим

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots \quad (9)$$

Таким образом, все коэффициенты ряда (8) определяются единственным образом формулами (9), что и доказывает теорему. ■

Подставляя полученные выражения коэффициентов в равенство (8), получаем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Итак, если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд имеет вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (10)$$

Ряд (10) называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция. Для нее можно составить ряд (10). Установим, при каких условиях сумма ряда (10) совпадает с функцией $f(x)$. Ответ на этот вопрос можно получить с помощью формулы Маклорена. В гл. 6 § 3 было показано, что для любой бесконечно дифференцируемой функции справедлива формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x),$$

где остаточный член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1. \quad (11)$$

Если обозначить через $S_n(x)$ частичную сумму ряда Маклорена, то формулу Маклорена можно записать так:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \quad (12)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 14.17. Для того чтобы ряд Маклорена (10) сходился на $(-R, R)$ и имел своей суммой функцию $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $(-R, R)$ остаточный член $R_n(x)$ формулы Маклорена (11) стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R, R)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ — сумма ряда Маклорена на $(-R, R)$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$. Тогда из равенства (12) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R, R)$.

Достаточность. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (-R, R)$. Тогда из равенства (12) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$. Это и означает, что ряд Маклорена (10) сходится на $(-R, R)$ и его сумма равна $f(x)$. ■

Из теоремы вытекает, что вопрос о разложении функции в ряд Маклорена сводится к исследованию поведения остаточного члена $R_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

Разложение функции $f(x) = e^x$. Имеем: $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$, откуда при $x = 0$ получаем: $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$. По формуле (10) для функции e^x составим ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (13)$$

Найдем интервал сходимости ряда (13)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \infty.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Докажем теперь, что функция e^x — сумма ряда (13).

Отметим, что в силу необходимого условия сходимости ряда для любого x справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0. \quad (14)$$

Так как $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. Отсюда, учитывая, что $e^\xi < e^{|x|}$, получаем

$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Так как в силу (14)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0, \text{ то и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Поэтому, переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при любом x , и, следовательно, функция e^x является суммой ряда (13).

Таким образом, при любом x имеет место разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Разложение функции $f(x) = \sin x$. Имеем: $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, ..., $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (см. гл. 5, § 10, п. 2), откуда, полагая $x=0$, получаем: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$, ... Составим по формуле (10) для функции $\sin x$ ряд Маклорена:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Легко проверить, что полученный ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой. Исследуем остаточный член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. Так как $\left|\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq 1$, то $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. В силу (14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ при любом x . А это означает, что функция $\sin x$ является суммой построенного ряда, т. е. имеет место разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Разложение функции $f(x) = \cos x$. Аналогично предыдущему, можно получить разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, справедливое при любом x . Однако еще проще разложение $\cos x$ получается почленным дифференцированием ряда для $\sin x$:

$$(\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \left(\frac{x^7}{7!}\right)' + \dots + \left[\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]' + \dots,$$

откуда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Кроме рассмотренных функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в ряд Маклорена могут быть разложены и многие другие функции. Вместо ряда Маклорена можно было бы рассмотреть более общий ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, где $a \neq 0$, т. е. ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Все изложенное полностью переносится и на эти ряды.

При разложении функции $\cos x$ в ряд Маклорена было использовано свойство почленной дифференцируемости степенных рядов. Аналогично можно использовать и другое свойство степенных рядов — их почленную интегрируемость. В качестве примера разложим с помощью почленного интегрирования в степенные ряды функции $\ln(1+x)$ и $\arctg x$.

Рассмотрим ряд $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$. Данный ряд является геометрической прогрессией, первый член которой равен единице, а знаменатель $q=x$. Как известно, при $|x|<1$ данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Следовательно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (15)$$

Равенство (15) является разложением функции $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в степенной ряд.

Подставляя в равенство (15) $-t$ вместо x , получаем равенство

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots,$$

справедливое при $|t|<1$. Проинтегрируем этот степенной ряд почленно в пределах от 0 до x ($|x|<1$). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t} &= \ln(1+t) \Big|_0^x = \ln(1+x) = \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots) dt = \\ &= \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \dots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \dots = \\ &= t \Big|_0^x - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \frac{t^3}{3} \Big|_0^x - \frac{t^4}{4} \Big|_0^x + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x + \dots = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (16)$$

Равенство (16) является разложением функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. Оно справедливо при $|x|<1$. Можно доказать, что это равенство верно и для $x=1$.

Действительно, при $x=1$ левая часть (16) равна $\ln 2$, а правая часть — сходящийся по признаку Лейбница числовой ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (17)$$

Остается проверить справедливость равенства

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (18)$$

Для этого проинтегрируем от 0 до 1 выражение

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t},$$

полученное в результате деления единицы на $1+t$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} &= \ln(1+t) \Big|_0^1 = \ln 2 = \\ &= \int_0^1 \left(1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right) dt = \\ &= \int_0^1 dt - \int_0^1 t dt + \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 t^3 dt + \dots + (-1)^{n-1} \int_0^1 t^{n-1} dt + \\ &+ (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \\ &+ (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt. \quad (19)$$

В этом равенстве сумма первых n слагаемых является частичной суммой S_n ряда (17). Запишем (19) в виде

$$\ln 2 - S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t}. \quad (20)$$

Так как $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ при $0 \leq t \leq 1$, то

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} \right| = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда заключаем, что интеграл в правой части (20) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$, что и означает справедливость равенства (18).

Найдем теперь разложение функции $\operatorname{arctg} x$. Подставляя в (15) $-t^2$ вместо x и интегрируя по t от 0 до x , имеем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (21)$$

Равенство (21) справедливо при $|x| < 1$. Однако аналогично предыдущему можно показать, что оно верно и для $x = \pm 1$.

В заключение отметим, что степенные ряды имеют разнообразные приложения. С их помощью с любой заданной точностью вы-

числяют значения функций (в частности, значения π и e); находят приближенные значения определенных интегралов, которые или не выражаются через элементарные функции, или сложны для вычислений. Так, например, интеграл $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$ не берется в элементарных функциях, поскольку первообразная функции $\frac{\sin x}{x}$ не является элементарной. В то же время эта первообразная легко выражается в виде степенного ряда. Действительно, так как $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$, то, умножая этот ряд на $1/x$, получаем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots,$$

причем последний ряд сходится при любом x . Интегрируя его почленно от 0 до a , имеем

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3!3} + \frac{a^5}{5!5} - \frac{a^7}{7!7} + \dots$$

С помощью этого равенства можно при любом a с любой степенью точности вычислить данный интеграл.

Наконец, значительную роль играют степенные ряды в приближенных методах решений дифференциальных уравнений.

§ 6. Комплексные ряды

1. **Краткие сведения о комплексных числах.** Комплексным числом z называется упорядоченная пара вещественных чисел $(x; y)$, т. е. $z = (x; y)$. При этом x называется *вещественной*, а y — *мнимой частью* комплексного числа.

Комплексное число $z = (x; y)$ изображается на плоскости Oxy точкой M с координатами $(x; y)$ или вектором $\overline{OM}$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y (рис. 216). Плоскость Oxy в этом случае называется *условно комплексной плоскостью*.

Комплексное число вида $(x; 0)$ отождествляется с вещественным числом x , т. е. $(x; 0) = x$. Это позволяет рассматривать множество всех вещественных чисел как подмножество множества комплексных чисел. На комплексной плоскости вещественные числа изображаются точками на оси Ox , которая называется *вещественной осью*.

Комплексное число $(x; y)$ при $y \neq 0$ называется *мнимым*. Мнимое число $(0; y)$ называется *чисто мнимым* и символически обозначается $z = iy$. Чисто мнимое число $(0; 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i , т. е. $i = (0; 1)$. Чисто мнимые числа на комплексной плоскости изображаются точками на оси Oy , которая называется *мнимой осью*.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Отсюда следует, что векторы,

изображающие равные комплексные числа, равны между собой. Комплексное число $0 = (0; 0)$ называется *нулем*.

Действия над комплексными числами. Определим алгебраические действия над комплексными числами.

Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называется комплексное число

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Вычитание комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е. число z называется *разностью* чисел z_1 и z_2 , если $z + z_2 = z_1$. Из этого определения вытекает, что комплексное число

$$z = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

является разностью комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$.

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, т. е. число z называется *частным* чисел z_1 и $z_2 \neq 0$, если $z \cdot z_2 = z_1$. Из этого определения следует, что комплексное число

$$z = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

является частным комплексных чисел $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$.

В действиях с комплексными числами особую роль играет мнимая единица $i = (0; 1)$. Умножая ее саму на себя (т. е. возводя в квадрат), в силу определения произведения комплексных чисел получаем $(0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1$, т. е. $i^2 = -1$. Таким образом, любое комплексное число $z = (x; y)$ можно представить в виде

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = (x; 0) + (y; 0) \cdot (0; 1) = x + iy \quad (1)$$

и производить над комплексными числами действия по обычным правилам алгебры многочленов. Запись (1) называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Комплексное число $\bar{z} = (x; -y) = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = (x; y) = x + iy$ и изображается на комплексной плоскости точкой, симметричной точке z относительно оси Ox .

Пример. Найти произведение сопряженных чисел $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$.

Решение. Имеем

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = xx + ixy - iyx + yy = x^2 + y^2.$$

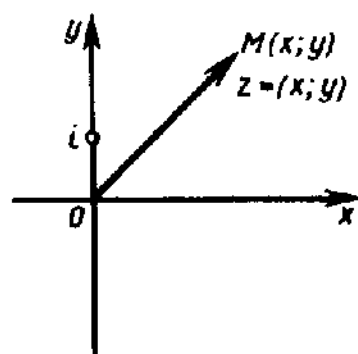


Рис. 216

Тригонометрическая форма комплексного числа. Введем на комплексной плоскости Oxy полярную систему координат так, чтобы полюс находился в начале O прямоугольной системы, а полярная ось совпадала с положительной полуосью Ox (рис. 217). Рассмотрим комплексное число $z = x + iy$. По формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, связывающим полярные и прямоугольные координаты, получим тригонометрическую форму записи комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Число ρ называется *модулем*, а число φ — *аргументом* комплексного числа z . Они обозначаются так: $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Отметим, что аргумент φ данного числа z определен неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а модуль числа $z = x + iy$ имеет значение

$$\rho = |z| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

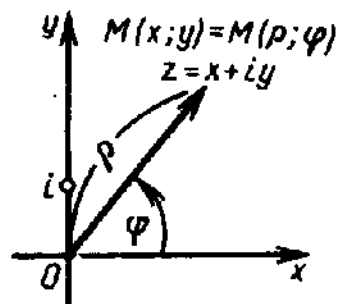


Рис. 217

Значение аргумента, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \varphi < 2\pi$, называется *главным* и обозначается $\varphi = \operatorname{arg} z$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен, а его модуль равен нулю.

Пример. Представить в тригонометрической форме следующие числа: 1) $z = 2 + i2\sqrt{3}$; 2) $z = 5$; 3) $z = i$.

Решение. 1) Для $z = 2 + i2\sqrt{3}$ имеем: $x = 2$, $y = 2\sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, $\cos \varphi = x/\rho = 1/2$, $\sin \varphi = y/\rho = \sqrt{3}/2$. Этим значениям косинуса и синуса соответствует значение аргумента $\varphi = \pi/3$. Следовательно, $z = 2 + i2\sqrt{3} = 4 (\cos (\pi/3) + i \sin (\pi/3))$.

2) Для $z = 5$ имеем: $x = 5$, $y = 0$, $\rho = 5$, $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$. Таким образом, $z = 5 = 5 (\cos 0 + i \sin 0)$.

3) Для $z = i$ имеем: $x = 0$, $y = 1$, $\rho = 1$, $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$. Следовательно, $z = i = 1 \cdot (\cos (\pi/2) + i \sin (\pi/2))$.

В тригонометрической форме удобно выполнять действия умножения и деления комплексных чисел. Пусть $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) &= z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho = \rho_1 \rho_2, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. В случае деления комплексных чисел при $\rho_2 \neq 0$ имеют место соотношения

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Если перемножаются n равных комплексных чисел $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Если положить $\rho = 1$, то получим формулу

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

которая называется *формулой Муавра**.

2. Предел последовательности комплексных чисел. Теорию пределов, рассмотренную ранее для последовательностей вещественных чисел, можно обобщить и на случай последовательностей комплексных чисел; при этом многие определения, связанные с предельным переходом, полностью повторяются.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, где $z_n = (x_n + iy_n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Комплексное число $a = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. Последовательность $\{z_n\}$ в этом случае называется *сходящейся* к числу a ,

что записывается в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ или $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Геометрически это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера N , зависящего от ε , все элементы последовательности $\{z_n\}$ попадут в круг радиуса ε с центром в точке a , и точки z_n с возрастанием n неограниченно приближаются к точке a . Это следует из равенств

$$|z_n - a| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = \rho(M_n; M_0),$$

где $\rho(M_n; M_0)$ — расстояние между точками $M_n(x_n; y_n)$ и $M_0(x_0; y_0)$, т. е. между точками, изображающими числа z_n и a .

Каждое комплексное число z_n является упорядоченной парой вещественных чисел $(x_n; y_n)$, поэтому последовательности $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности вещественных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, составленные соответственно из вещественных и мнимых частей элементов z_n последовательности $\{z_n\}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 14.18. *Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ является сходимость последовательностей вещественных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $z_n \rightarrow a = x_0 + iy_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$. Отсюда $|x_n - x_0| \leq |z_n - a| < \varepsilon$, $|y_n - y_0| \leq |z_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$ и, следовательно, $x_n \rightarrow x_0$ и $y_n \rightarrow y_0$.

Достаточность. Пусть $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ и пусть $a = x_0 + iy_0$. Тогда из соотношения $|z_n - a| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ следует, что $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. ■

* Муавр Абрахам де (1667—1754) — английский математик, француз по национальности.

Эта теорема позволяет перенести основные результаты теории пределов для последовательностей вещественных чисел на последовательности комплексных чисел.

3. Числовые ряды с комплексными членами. Составим ряд из комплексных чисел

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (2)$$

где $z_n = x_n + iy_n$. Ряд (2) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)$ при $n \rightarrow \infty$; предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называется *суммой* ряда.

Ряду (2) с комплексными членами соответствуют два вещественных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Так же как для последовательности комплексных чисел (см. теорему 14.18), можно доказать, что для сходимости ряда (2) необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. При этом, если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S'$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = S''$, то $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S' + iS''$.

Для изучения сходимости ряда (2) полезна следующая теорема.

Теорема 14.19. Пусть дан ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n. \quad (3)$$

Тогда, если сходится ряд, составленный из модулей членов ряда (3)

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \quad (4)$$

то сходится ряд (3).

Доказательство. Пусть $z_n = x_n + iy_n$; тогда $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ и $|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, $|y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Поэтому согласно признаку сравнения рядов с вещественными членами (см. теорему 14.6) из сходимости ряда (4) вытекает, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ сходятся. Следовательно, сходятся, и притом абсолютно, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, а этого достаточно для сходимости ряда (3). ■

Если ряд (4) сходится, то говорят, что ряд (3) сходится абсолютно.

Доказанная теорема позволяет применять при исследовании сходимости рядов с комплексными членами все достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными вещественными членами.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$.

Решение. Данный ряд сходится абсолютно, так как, применяя к ряду, составленному из модулей его членов, признак Даламбера, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+i|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! |1+i|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+i|}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0 < 1. \end{aligned}$$

4. Степенные ряды с комплексными членами. Ряд вида

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad (5)$$

где z — комплексная переменная; a_n и a — комплексные числа, называется *степенным рядом*. Как и для вещественных чисел, ограничимся рассмотрением степенных рядов вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (6)$$

Ряд (5) приводится к виду (6) с помощью подстановки $z-a=t$.

Для определения области сходимости степенного ряда (6) используют теорему Абеля (см. теорему 14.11), которая формулируется и доказывается, как и для вещественных чисел. Приведем формулировку теоремы.

Теорема 14.20. 1) Если степенной ряд (6) сходится при $z=z_0$ ($z_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, для всех z , удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$; 2) если ряд (6) расходится при $z=z_1$, то он расходится для всех z , удовлетворяющих условию $|z| > |z_1|$.

Рассмотрим геометрическое истолкование теоремы Абеля. Если z_0 — точка сходимости ряда (6), то во всех точках, расположенных внутри круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат, ряд сходится абсолютно, а если z_1 — точка расходимости ряда (6), то во всех точках, расположенных вне круга радиуса $|z_1|$ с центром в начале координат, ряд расходится (рис. 218).

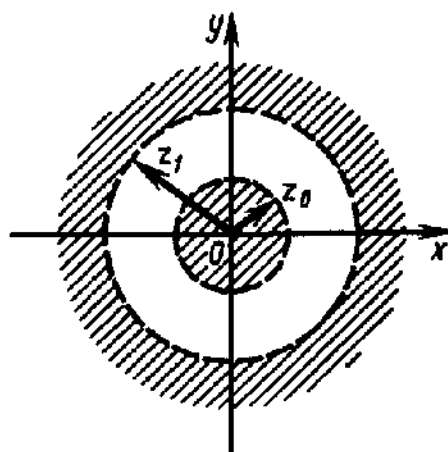


Рис. 218

Аналогично тому, как это было сделано для степенных рядов в случае вещественных чисел, можно установить вид области сходимости ряда (6).

Теорема 14.21. Если ряд (6) сходится не при всех значениях z и не только при $z=0$, то существует число $R>0$ такое, что ряд сходится абсолютно при $|z|<R$ и расходится при $|z|>R$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 14.12. Круг на комплексной плоскости с центром в начале координат и радиусом R называют *кругом сходимости* степенного ряда (6), а число R — *радиусом сходимости*. На границе круга сходимости ($|z|=R$) вопрос о сходимости ряда решается, как и в случае вещественных чисел, дополнительным исследованием.

Если степенной ряд (6) сходится только в точке $z=0$, то полагают $R=0$, если же ряд сходится при любом значении z , т. е. на всей комплексной плоскости, то считают $R=\infty$.

Радиус сходимости степенного ряда (6) можно находить так же, как и в случае вещественных чисел.

Пример. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Решение. Имеем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится при любом значении z .

Рассмотрим ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (7)$$

Очевидно, внутри круга сходимости ряда (7) его сумма $f(z)$ является функцией комплексной переменной z . Функции комплексной переменной, представимые в виде степенных рядов, называются *аналитическими*. Изучение таких функций выходит за рамки данного курса*.

5. Формулы Эйлера. Установим с помощью степенных рядов две формулы, которые имеют широкое применение.

В § 5 было получено разложение функции e^x в степенной ряд, сходящийся при любом значении x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (8)$$

Если вещественную переменную x заменить комплексной переменной z , то получим ряд по степеням z :

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

* См. книгу: Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М., 1967.

сходящийся, как это следует из только что рассмотренного примера, при всех значениях z . Обозначим его сумму через e^z . Таким образом, по определению, для любого комплексного числа z

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (9)$$

Сумму ряда (9) называют *показательной функцией комплексной переменной z* .

Аналогично определяются тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ комплексной переменной z :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (10)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (11)$$

Между показательной функцией e^z и тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ существует простая связь. Подставим в (9) iz вместо z и сгруппируем в правой части все слагаемые, содержащие множитель i и не содержащие этот множитель:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \dots = \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} - \dots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right). \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с формулами (10) и (11), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (12)$$

Далее, подставляя в (9) $-iz$ вместо z , имеем

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) называются *формулами Эйлера*. Они устанавливают связь между показательной и тригонометрическими функциями комплексной переменной z . Если почленно сложить и вычесть равенства (12) и (13), то получим другую запись формул Эйлера:

$$\cos z = \frac{e^z + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^z - e^{-iz}}{2i}. \quad (14)$$

Таким образом, функции e^z , $\sin z$, $\cos z$ связаны соотношениями (12) — (14). При $z=x$ (x — вещественная переменная) эти функции комплексной переменной совпадают соответственно с функциями e^x , $\sin x$ и $\cos x$ вещественной переменной.

§ 7. Ряды Фурье

1. Тригонометрический ряд и его основные свойства. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

называется *тригонометрическим рядом*, а числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ — *коэффициентами тригонометрического ряда*.

В отличие от степенного ряда, рассмотренного ранее, в тригонометрическом ряде вместо простейших функций $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ взяты тригонометрические функции

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad (2)$$

которые также хорошо изучены.

Прежде всего отметим, что все функции системы (2) являются *периодическими* с периодом 2π . В самом деле, постоянная $1/2$ имеет любой период, а период функций $\sin nx$ и $\cos nx$ ($n=1, 2, \dots$) равен $2\pi/n^*$ и, следовательно, число $2\pi = n(2\pi/n)$ также их период. Очевидно, что каждый член тригонометрического ряда (1) является периодической функцией с периодом 2π . Поэтому и любая частичная сумма ряда (1) 2π -периодична (если все члены ряда не меняются от замены x на $x + 2\pi$, то и сумма его не изменяется от этой замены). Отсюда следует, что если ряд (1) сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он сходится на всей числовой прямой и его сумма, будучи пределом последовательности периодических частичных сумм, является периодической функцией с периодом 2π . Поэтому тригонометрические ряды особенно удобны при изучении периодических функций, описывающих различные периодические процессы, которые имеют место в природе и технике. Примерами периодических процессов служат колебательные и вращательные движения различных деталей машин и приборов, периодическое движение небесных тел и элементарных частиц, акустические и электромагнитные колебания и др.

Другим важным свойством функций системы (2) является их *ортogonalность* на отрезке $[-\pi, \pi]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos kx \, dx = \frac{1}{2k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \quad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin kx \, dx = -\frac{1}{2k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

* Действительно, $\sin [n(x \pm 2\pi/n)] = \sin (nx \pm 2\pi) = \sin nx$.

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (k+n)x + \cos (k-n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (k+n)x}{k+n} + \frac{\sin (k-n)x}{k-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ при } k \neq n. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = 0 \text{ при } k \neq n; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0. \quad (5)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось показать.

2. Ряд Фурье. Аналогично степенному ряду, для тригонометрического ряда имеет место следующая теорема.

Теорема 14.22. Если функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7)$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно.

Доказательство. Интегрируя (7), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right],$$

откуда, учитывая (3), находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \quad (8)$$

Для определения коэффициента a_k при $\cos kx$ (k — натуральное число) умножим равенство (7) на $\cos kx$ и проинтегрируем по x

от $-\pi$ до π^* . Тогда на основании формул (3) — (6) получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx \right] = \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = a_k \pi, \end{aligned}$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx. \quad (9)$$

Аналогично, умножая равенство (7) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$, до π , на основании тех же формул получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \pi,$$

откуда находим

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты a_0 , a_k и b_k ряда (7) определяются единственным образом формулами (8) — (10), что и доказывает теорему. ■

Эта теорема дает основание ввести следующее определение.

Определение. Пусть $f(x)$ — функция, определенная и интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда числа a_0 , a_n , b_n , найденные по формулам (8) — (10), называются коэффициентами Фурье, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с этими коэффициентами называется рядом Фурье** функции $f(x)$.

3. Сходимость ряда Фурье. Введем понятие периодического продолжения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Будем говорить, что функция $F(x)$, определенная на всей числовой прямой и периодическая с периодом 2π , является периодическим продолжением функции $f(x)$, если на отрезке $[-\pi, \pi]$ $F(x) = f(x)$.

* В теории рядов доказывается, что ряд (7) можно интегрировать почленно после умножения его на ограниченную функцию.

** Фурье Жан Батист Жозеф (1768—1830) — французский математик и физик.

Очевидно, что если на отрезке $[-\pi, \pi]$ ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, то он сходится на всей числовой прямой к ее периодическому продолжению.

Установим, при каких условиях ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции.

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 14.23. Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[-\pi, \pi]$ или же имеют на нем конечное число точек разрыва 1-го рода. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всей числовой прямой, причем в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$, в которой $f(x)$ непрерывна, сумма ряда равна $f(x)$, а в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$\frac{f(x_0 -) + f(x_0 +)}{2},$$

где $f(x_0 -) = \lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$ и $f(x_0 +) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$. На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда равна

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

В любой точке $x \in [-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье равна $F(x)$, если x — точка непрерывности $F(x)$, и равна $\frac{F(x-) + F(x+)}{2}$, если x — точка разрыва $F(x)$, где $F(x)$ — периодическое продолжение $f(x)$.

4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и является четной, т. е. $f(-x) = f(x)$. Тогда ее коэффициенты Фурье b_n равны нулю. Действительно,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right].$$

В первом интеграле в квадратных скобках сделаем замену переменной. Положим $x = -t$. Тогда $dx = -dt$; если $x = -\pi$, то $t = \pi$; если $x = 0$, то $t = 0$. Принимая во внимание, что функция $f(x)$ четная, а функция $\sin x$ — нечетная, получаем

$$\int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx \, dx = - \int_{\pi}^0 f(-t) \sin n(-t) \, dt = - \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Следовательно,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt + \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right] = 0$$

(напомним, что определенный интеграл на зависит от обозначения переменной интегрирования).

Аналогично, учитывая, что функции $f(x)$ и $\cos x$ четные, можно получить следующие выражения для коэффициентов a_n :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (11)$$

Пусть теперь функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$, нечетная, т. е. $f(x) = -f(-x)$. Тогда, используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что коэффициенты Фурье a_n равны нулю, а коэффициенты b_n определяются выражениями вида

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (12)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ четная, то ряд Фурье содержит только косинусы и только синусы, если функция $f(x)$ нечетная. Формулы (11) и (12) позволяют упростить вычисление коэффициентов Фурье, когда заданная функция является четной или нечетной.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 14.23 и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как она нечетная, то ее коэффициенты Фурье $a_n = 0$, а b_n находятся по формуле (12). Имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье данной функции

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots \right).$$

Это равенство справедливо для любого $x \in (-\pi, \pi)$. В точках $x = \pm \pi$ сумма ряда Фурье по теореме 14.23 не совпадает со значениями функции $f(x) = x$, а равна $\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$. Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда является периодическим продолжением функции $f(x) = x$; ее график изображен на рис. 219, а.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 14.23 и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как она четная, то ее коэффициенты Фурье $b_n = 0$, а a_n находятся по формулам (11). Имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right).$$

Это равенство справедливо для любого $x \in [-\pi, \pi]$, так как в точках $x = \pm \pi$ сумма ряда в данном случае совпадает со значениями функции $f(x) = x^2$, поскольку $(f(-\pi) + f(\pi))/2 = (\pi^2 + \pi^2)/2 = \pi^2 = f(\pi) = f(-\pi)$. Графики функции $f(x) = x^2$ и суммы данного ряда Фурье изображены на рис. 219, б.

5. Ряд Фурье с периодом $2l$.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$ (l — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы 14.23. Разложим ее в ряд Фурье.

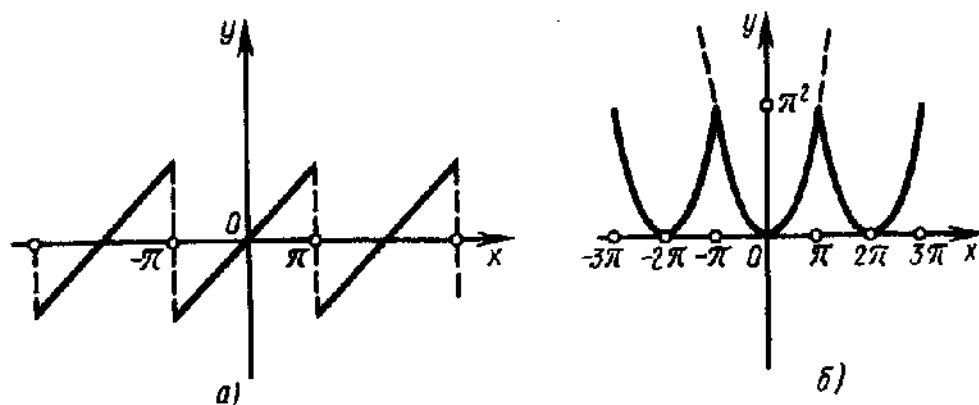


Рис. 219

Введем новую переменную ξ по формуле

$$x = \frac{l\xi}{\pi}$$

и рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = f(x)$.

Очевидно, функция $\varphi(\xi)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на нем условиям теоремы 14.23.

Разложим функцию $\varphi(\xi)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье

$$\varphi(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi), \quad (13)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) d\xi; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \cos n\xi d\xi; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi d\xi.$$

Вернемся теперь к старой переменной x : $x = \frac{l}{\pi}\xi$, $\xi = x \frac{\pi}{l}$, $d\xi = \frac{\pi}{l} dx$. Тогда формула (13) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (14)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Формула (14) и есть ряд Фурье с периодом $2l$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье с периодом $2l$ функцию $f(x)$, которая на отрезке $[-l, l]$ задается формулой $f(x) = |x|$.

Решение. Так как функция $f(x) = |x|$ четная, то

$$\begin{aligned} b_n &= 0; \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = \frac{2}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = l; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{l \cdot x \sin \frac{n\pi x}{l}}{n\pi} \Big|_0^l - \frac{l}{n\pi} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \frac{2l}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l = \\ &= \frac{2l}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ -\frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right].$$

Функция $|x|$ удовлетворяет условиям теоремы 14.23 и полученное равенство справедливо для любого $x \in [-l, l]$, а это значит, что ряд сходится на всей числовой прямой и его суммой является функция, график которой изображен на рис. 220.

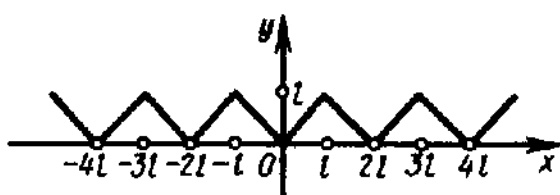


Рис. 220

Отметим, что ряды Фурье имеют очень широкое применение

как в теоретических исследованиях, так и в практических задачах.

ГЛАВА 15

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В математике дифференциальные уравнения занимают особое место. Математическое исследование самых разнообразных явлений, происходящих в природе, часто приводит к решению таких уравнений, поскольку сами законы, которым подчиняется то или иное явление, записываются в виде дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения — это уравнения, в которые известная функция входит под знаком производной. Основная задача теории дифференциальных уравнений — изучение функций, являющихся решениями таких уравнений.

Дифференциальные уравнения можно разделить на обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями одной переменной, и на дифференциальные уравнения в частных производных, в которых неизвестные функции являются функциями двух и большего числа переменных.

Теория дифференциальных уравнений в частных производных более сложная и рассматривается в более полных или специальных курсах математики*. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в данной главе. В дальнейшем, говоря о дифференциальных уравнениях, будем иметь в виду только обыкновенные дифференциальные уравнения.

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Изучение теории дифференциальных уравнений начнем с наиболее простого уравнения — уравнения первого порядка.

1. Определение дифференциального уравнения первого порядка.
Определение 1. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

где x — независимая переменная; y — искомая функция; y' — ее производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Если уравнение (1) можно разрешить относительно y' , то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Будем рассматривать именно такие уравнения.

В некоторых случаях уравнение (2) удобно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ или в виде $f(x, y) dx - dy = 0$, являющемся частным случаем более общего уравнения

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (3)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — известные функции. Уравнение в симметричной форме (3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Приведем примеры дифференциальных уравнений вида (2) и (3):

$$y' = xe^y, y' = \frac{y \ln x}{x}, y' = x + y, x dx + y dy = 0.$$

* См. книгу: Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1972.

2. Решение уравнения. Задача Коши. Определение 2. Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)^*$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, например, функция $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения $3y - xy' = 0$, т. е. при подстановке в уравнение обращает его в тождество: $3x^3 - x3x^2 \equiv 0$.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях уравнение (2) имеет решение, дает теорема Коши, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2) и является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема 15.1 (теорема Коши).** Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области G плоскости Oxy , то какова бы ни была внутренняя точка $(x_0; y_0)$ области G , в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условиям:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \quad (4)$$

Теорема Коши дает возможность по виду дифференциального уравнения (2) решать вопрос о существовании и единственности его решения. Это особенно важно в тех случаях, когда заранее неизвестно, имеет ли данное уравнение решение.

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку $(x_0; y_0)$ области G проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, что в области G уравнение (2) имеет бесконечное число различных решений.

Условия (4), в силу которых функция $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0 , называют *начальными условиями* решения и записывают обычно так:

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0. \quad (5)$$

Отыскание решения уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям (5), — одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется *задачей Коши*. С геометрической точки зрения решить задачу Коши — значит из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку $(x_0; y_0)$ плоскости Oxy .

Точки плоскости, через которые либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются *особыми точками* данного уравнения.

3. Общее и частное решение уравнения. Дадим два основных определения.

* Интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны.

** Доказательство теоремы см., например, в книге: Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980.

Определение 3. Общим решением уравнения (2) в некоторой области G плоскости Oxy называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C , если она является решением уравнения (2) при любом значении постоянной C , и если при любых начальных условиях (5) таких, что $(x_0; y_0) \in G$, существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям $\varphi(x_0, C) = y_0$.

Определение 4. Частным решением уравнения (2) в области G называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy , зависящее от одной произвольной постоянной C , а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ — одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $(x_0; y_0)$.

Иногда начальные условия (5) называют условиями Коши, а частным решением называют решение какой-нибудь задачи Коши.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y' = 3x^2$.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка. Оно удовлетворяет всем условиям теоремы Коши, так как функции $f(x, y) = 3x^2$ и $f'_y(x, y) = 0$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy . Легко проверить, что функция $y = x^3 + C$, где C — произвольная постоянная, является общим решением данного уравнения во всей плоскости Oxy .

Геометрически это общее решение представляет собой семейство кубических парабол. При различных значениях постоянной C получаем различные решения данного уравнения. Например, если $C = 0$, то $y = x^3$, если $C = -1$, то $y = x^3 - 1$, если $C = 2$, то $y = x^3 + 2$, и т. д.

Для решения какой-нибудь задачи Коши, т. е. отыскания частного решения, зададим произвольные начальные условия: $x = x_0$, $y = y_0$. Подставляя эти значения в общее решение $y = x^3 + C$ вместо x и y , получаем $y_0 = x_0^3 + C$, откуда $C = y_0 - x_0^3$. Таким образом, найдено частное решение $y = x^3 + y_0 - x_0^3$. Геометрически это означает, что из семейства кубических парабол $y = x^3 + C$ выбрана одна, проходящая через заданную точку $(x_0; y_0)$ (рис. 221).

Пример 2. Рассмотрим уравнение $y' = -y/x$.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка. Функции $f(x, y) = -y/x$ и $f'_y(x, y) = -1/x$ непрерывны при $x \neq 0$. Следовательно, во всей плоскости Oxy , кроме оси Oy , это уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши.

Нетрудно проверить, что общим решением данного уравнения в областях $y > 0$ и $y < 0$ является функция $y = C/x$, где C — произвольная постоянная. При различных значениях постоянной C получаем различные решения.

Найдем частное решение, удовлетворяющее, например, начальным условиям $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Имеем $1 = C/1$. Отсюда $C = 1$ и искомое частное решение $y = 1/x$.

Геометрически общее решение данного уравнения представляет собой семейство гипербол $y = C/x$, каждая из которых изображает частное решение данного уравнения. Задавая начальные условия $x_0 = 1, y_0 = 1$, выделяем из всего семейства ту гиперболу, которая проходит через точку $(1; 1)$ плоскости Oxy (рис. 222).

Заметим, что через точки, лежащие на оси Oy , не проходит ни одна интегральная кривая, т. е. это особые точки данного уравнения.

4. Геометрический смысл уравнения. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ и пусть функция $y = \varphi(x)$ — его решение. График решения представляет собой непрерывную интегральную кривую, через каждую точку которой можно провести касательную. Из уравнения следует, что угловой коэффициент y' касательной к интегральной кривой в каждой ее точке $(x; y)$ равен значению в этой точке правой части уравнения $f(x, y)$. Таким образом, уравнение $y' = f(x, y)$ устанавливает зависимость между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к графику интегральной кривой в той же точке. Зная x и y , можно указать направление касательной к этой интегральной кривой в точке $(x; y)$.

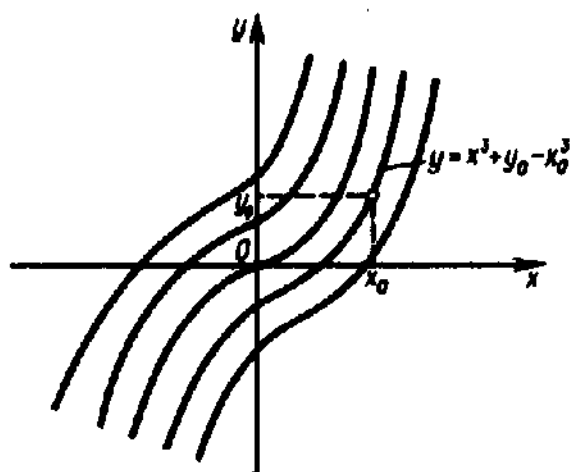


Рис. 221

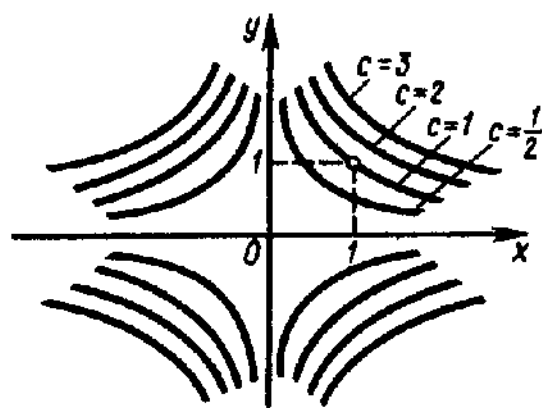


Рис. 222

Сопоставим каждой точке $(x; y)$ интегральной кривой направленный отрезок, угловой коэффициент которого равен $f(x, y)$. Получим так называемое *поле направлений* данного уравнения, раскрывающее геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.

Итак, с геометрической точки зрения уравнение $y' = f(x, y)$ определяет на плоскости Oxy поле направлений, а решение этого уравнения — интегральная кривая, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.

Построив на плоскости поле направлений данного дифференциального уравнения, можно приближенно построить интегральные кривые.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $y' = y/x$.

Функция $f(x, y) = y/x$ не определена при $x=0$, следовательно, поле направлений для данного уравнения можно построить на всей плоскости, кроме оси Oy .

В каждой точке $(x; y)$ ($x \neq 0$) угловой коэффициент y' касательной к интегральной кривой равен y/x и совпадает с угловым коэффициентом прямой, проходящей через начало координат и эту точку. На рис. 223 изображено поле направлений данного уравнения. Очевидно, что интегральными кривыми являются прямые $y=Cx$ (C — произвольная постоянная).

Рассмотрим теперь методы нахождения решений дифференциальных уравнений первого порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают отдельные типы уравнений, и для каждого из них находят свой способ нахождения решения.

5. Уравнения с разделяющимися переменными. Определение 5. Уравнение вида

$$y' = f_1(x) f_2(y), \quad (6)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Для отыскания решения уравнения (6) нужно, как говорят, разделить в нем переменные. Для этого заменим в (6) y' на $\frac{dy}{dx}$, разделим обе части уравнения на $f_2(y)$ (предполагаем $f_2(y) \neq 0$) и умножим на dx . Тогда уравнение (6) принимает вид

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (7)$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть, а переменная y — только в левую (т. е. переменные разделены).

Предполагая, что функция $y=\varphi(x)$ является решением уравнения, и подставляя ее в (7), получаем тождество. Интегрируя тождество, получаем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x) dx + C_2, \text{ или } \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C, * \quad (8)$$

где $C = C_2 - C_1$ — произвольная постоянная.

Соотношение (8) определяет неявным образом общее решение уравнения (6).

Пример 4. Решить уравнение $y' = y/x$ (сравните с примером 3).

Решение. Данное уравнение вида (6), где $f_1(x) = 1/x$ и $f_2(y) = y$. Разделяя переменные, получаем: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя,

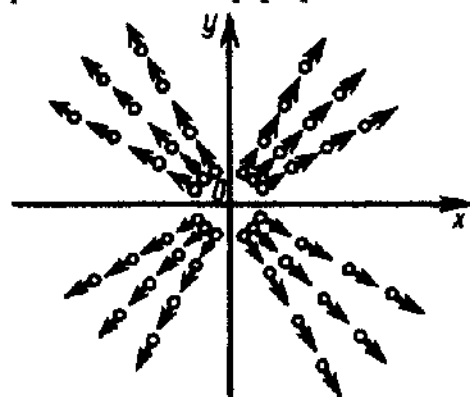


Рис. 223

* В теории дифференциальных уравнений символ неопределенного интеграла обозначает не все множество первообразных, а какую-то одну первообразную из этого множества.

имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln |C_1|, \quad C_1 \neq 0,^* \text{ или } \ln |y| = \ln |x| + \ln |C_1|.$$

Потенцируя, находим: $|y| = |C_1| |x|$, что эквивалентно уравнению $y = \pm C_1 x$. Полагая $\pm C_1 = C$, окончательно получаем

$$y = Cx \quad (9)$$

— общее решение данного уравнения, где C — произвольная постоянная, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но $C \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также решение уравнения (оно было потеряно при делении на y). Это решение можно включить в (9), если считать, что постоянная C принимает и значение $C = 0$. Геометрически общее решение (9) представляет собой семейство прямых, проходящих через начало координат.

Пусть требуется выделить из общего решения (9) частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Подставляя эти значения в общее решение (9) вместо x и y , получаем $2 = C \cdot 1$, откуда $C = 2$. Таким образом, искомое частное решение $y = 2x$.

6. Линейные уравнения. Определение 6. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (10)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение линейно, т. е. в первой степени.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (10) называется *линейным однородным уравнением*. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (10) называется *линейным неоднородным уравнением*.

Для нахождения общего решения уравнения (10) может быть применен *метод вариации постоянной*.

В этом методе сначала находят общее решение линейного однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0, \quad (11)$$

соответствующего данному неоднородному уравнению (10). Уравнение (11) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx, \quad \ln |y| = -\int p(x) dx + \ln |C_1|.$$

Отсюда, потенцируя, находим общее решение уравнения (11):

$$y = \pm C_1 e^{-\int p(x) dx}, \text{ или } y = C e^{-\int p(x) dx}, \quad (12)$$

где $C = \pm C_1$ — произвольная постоянная.

* Для упрощения записи мы обозначили произвольную постоянную не через C , а через $\ln |C_1|$, что возможно, так как $\ln |C_1|$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$.

Теперь найдем общее решение уравнения (10) в виде (12), где C будем считать не постоянной, а новой неизвестной функцией от x (в этом смысл метода!), т. е. в виде

$$y = C(x) e^{-\int p(x) dx}. \quad (13)$$

Чтобы найти функцию $C(x)$ и, тем самым, решение в виде (13), подставим функцию (13) в уравнение (10). Получим

$$C'(x) e^{-\int p(x) dx} - C(x) p(x) e^{-\int p(x) dx} + p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx} = f(x) \quad \text{или} \\ C'(x) = f(x) e^{\int p(x) dx}. \quad (14)$$

Итак, чтобы функция (13) являлась решением уравнения (10), функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению (14). Интегрируя его, находим

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в соотношение (13), получаем общее решение линейного уравнения (10):

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx. \quad (15)$$

При решении конкретных примеров проще повторять каждый раз все приведенные выше выкладки, чем использовать громоздкую формулу (15).

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y' + 3y = e^{2x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Здесь $p(x) = 3$, $f(x) = e^{2x}$. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение $y' + 3y = 0$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -3 dx$ и интегрируя, находим

$$\ln |y| = -3x + \ln |C_1| \quad \text{или} \quad y = \pm C_1 e^{-3x} = C e^{-3x}.$$

Ищем общее решение данного уравнения в виде $y = C(x) e^{-3x}$. Дифференцируя, имеем $y' = C'(x) e^{-3x} - 3C(x) e^{-3x}$. Подставляя в данное уравнение выражения для y и y' , получаем

$$C'(x) e^{-3x} = e^{2x}, \quad C'(x) = e^{5x} \quad \text{или} \quad dC = e^{5x} dx,$$

откуда $C(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C_2$, где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C(x) e^{-3x} = \left(\frac{1}{5} e^{5x} + C_2 \right) e^{-3x} \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{5} e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

7. Уравнения в полных дифференциалах. Определение 7. Уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (16)$$

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$ в некоторой области G , называется уравнением в полных дифференциалах.

Если уравнение (16) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать следующим образом:

$$dF(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — такая функция, что $dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (16) в неявном виде определяется уравнением

$$F(x, y) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Действительно, если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (16), то $dF(x, \varphi(x)) \equiv 0$, т. е. $F(x, \varphi(x)) = C$, и наоборот, для любой функции $y = \varphi(x)$, обращающей в тождество уравнение $F(x, y) = C$, получаем $dF(x, \varphi(x)) = 0$, т. е. $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (16).

Таким образом, нахождение решения уравнения (16) сводится к отысканию такой функции $F(x, y)$, дифференциал которой равен $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

Как известно (см. теорему 13.7), для того, чтобы выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (17)$$

Допустим, что условие (17) выполнено. Тогда существует функция $F(x, y)$ такая, что $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (18)$$

Интегрируя соотношение $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ по x , находим

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y), \quad (19)$$

где $C(y)$ — произвольная функция от y . Теперь подберем функцию $C(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (18). Для этого продифференцируем правую часть равенства (19) по y и производную приравняем $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) + C'(y) = Q(x, y). \quad (20)$$

Из полученного уравнения (20) определяем $C'(y)$ и, интегрируя, находим $C(y)$. Подставляя найденную функцию $C(y)$ в соотношение (19), получаем искомую функцию $F(x, y)$.

Чтобы выделить из общего решения частное, удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0, y = y_0$, надо в общем решении $F(x, y) =$

$=C$ x и y заменить начальными значениями. Тогда $C = F(x_0, y_0)$ и $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ — искомое частное решение.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy=0$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=1, y_0=0$.

Решение. Здесь $P(x, y)=x+y+1, Q(x, y)=x-y^2+3$. Так как

$$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x},$$

то выражение $(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. Имеем

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y) = \int (x+y+1) dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + C(y). \quad (21)$$

Найдем функцию $C(y)$, используя формулу (20):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} + xy + x + C(y) \right) = x - y^2 + 3;$$

$$C'(y) = -y^2 + 3; \frac{dC}{dy} = -y^2 + 3; dC = (-y^2 + 3) dy,$$

$$C(y) = \int (-y^2 + 3) dy + C_1 = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Подставляя найденное $C(y)$ в (21), получаем

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1.$$

Данное уравнение принимает вид $dF(x, y)=0$, а его общее решение определяется уравнением

$$F(x, y) = C_2 \text{ или } \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1 = C_2.$$

Полагая $6(C_2 - C_1) = C_3$ (C_3 — произвольная постоянная), получаем окончательное уравнение, определяющее неявно общее решение исходного дифференциального уравнения

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C_3.$$

Найдем теперь значение постоянной C_3 , при котором частное решение удовлетворяет заданным начальным условиям. Имеем: $3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = C_3$, откуда $C_3 = 9$, и искомое частное решение определяется уравнением

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = 9.$$

8. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера. Мы рассмотрели несколько способов нахождения точных решений дифференциальных уравнений первого порядка. Если ни один из них не приводит к цели или требует слож-

ных вычислений, то прибегают к приближенным методам решений уравнений. Познакомимся с простейшим из них — *методом Эйлера*.

Суть этого метода состоит в том, что искомая интегральная кривая, являющаяся графиком частного решения, приближенно заменяется ломаной.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

и начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$. Найдем приближенно решение уравнения на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Разобьем отрезок $[x_0, b]$ точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n равных частей. Пусть $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$. Обозначим через y_i приближенные значения искомого решения в точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

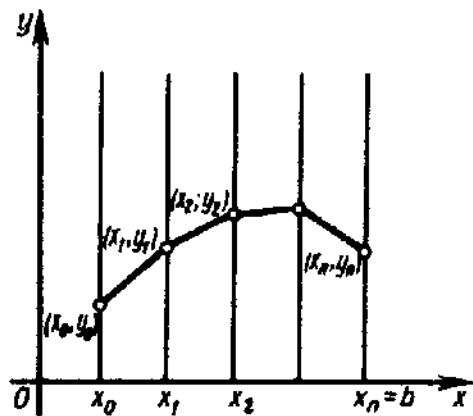


Рис. 224

Проведем через точки разбиения x_i прямые (рис. 224), параллельные оси Oy , и последовательно сделаем следующие однотипные операции.

Подставим значения x_0 и y_0 в правую часть уравнения $y' = f(x, y)$ и вычислим угловой коэффициент $y' = f(x_0, y_0)$ касательной к интегральной кривой в точке $(x_0; y_0)$. Для нахождения приближенного значения y_1 искомого решения заменяем на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую отрезком ее касательной в точке $(x_0; y_0)$. При этом получаем

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) (x_1 - x_0),$$

откуда, так как x_0, x_1, y_0 известны, находим

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) (x_1 - x_0) \text{ или } y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x.$$

Подставляя значения x_1 и y_1 в правую часть уравнения $y' = f(x, y)$, вычисляем угловой коэффициент $y' = f(x_1, y_1)$ касательной к интегральной кривой в точке $(x_1; y_1)$. Далее, заменяя на отрезке $[x_1, x_2]$ интегральную кривую отрезком касательной, находим приближенное значение решения y_2 в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) (x_2 - x_1), \text{ или } y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \Delta x.$$

В этом равенстве известными являются x_1, y_1, x_2 , а y_2 выражается через них.

Аналогично находим

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) \Delta x, \dots, y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \Delta x.$$

Таким образом, приближенно построена искомая интегральная кривая в виде ломаной и получены приближенные значения y_i искомого решения в точках x_i . При этом значения y_i вычисляются

по формуле

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1}) \Delta x \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Формула (22) и является *основной расчетной формулой метода Эйлера*. Ее точность тем выше, чем меньше разность Δx .

Степень точности метода Эйлера, вообще говоря, невелика. Существуют гораздо более точные методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Пример 7. Найти приближенное решение уравнения $y' = y + x$ на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, и вычислить y при $x = 1$.

Решение. Разделим отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$, ..., $x_{10} = 1$. Обозначим через $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ приближенные значения решения, которые будем искать по формуле (22). Имеем:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1,1, \quad y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,22.$$

Аналогично находятся остальные значения y_i , причем результаты вычисления удобно расположить в таблице, заполняя последовательно одну строку за другой.

x	y	$f(x, y) \Delta x$	x	y	$f(x, y) \Delta x$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	0,1	$x_6 = 0,6$	$y_6 = 1,9431$	0,2543
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1$	0,12	$x_7 = 0,7$	$y_7 = 2,1974$	0,2897
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,22$	0,142	$x_8 = 0,8$	$y_8 = 2,4871$	0,3287
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,36$	0,1662	$x_9 = 0,9$	$y_9 = 2,8158$	0,3715
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5282$	0,1928	$x_{10} = 1$	$y_{10} = 3,1873$	
$x_5 = 0,5$	$y_5 = 1,7210$	0,2221			

Второй столбец таблицы содержит приближенные значения искомого решения данного уравнения на $[0, 1]$, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Приближенное значение функции y при $x = 1$: $y_{10} = 3,1873$.

Чтобы сравнить приближенный результат с точным, найдем точное решение данного уравнения при тех же начальных условиях. Так как уравнение линейное, то используем метод вариации постоянной. Находим общее решение однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{y} = dx, \quad \ln |y| = x + \ln |C|, \quad y = Ce^x.$$

Варьируя постоянную $y = C(x)e^x$, $y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$ и подставляя в данное уравнение, получаем: $C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x$, $C'(x) = xe^{-x}$, $C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$,

$$y = C_1 e^x - x - 1$$

— общее решение данного уравнения. Подставляя вместо x и y начальные значения $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, находим $C_1 = 2$. Итак, точное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным на-

чальным условиям, $y = 2e^x - x - 1$. Точное решение при $x=1$ таково: $y(1) = 2(e-1) \approx 3,4366$. Сравнивая с приближенным значением, видим, что абсолютная погрешность составляет 0,2293.

9. Некоторые применения дифференциальных уравнений первого порядка. К дифференциальным уравнениям первого порядка приводят различные физические задачи. Основную трудность при их решении представляет составление дифференциальных уравнений. Здесь не существует универсального метода. Каждая задача требует индивидуального подхода, основанного на понимании законов физики, и умения переводить физические задачи на математический язык.

Рассмотрим несколько таких задач.

Задача о прожекторе. Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения и обладающего тем свойством, что все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке O на оси вращения, отражаются зеркалом параллельно этой оси.

Для решения задачи рассмотрим плоское сечение зеркала, проходящее через ось вращения. Поместим источник света в начале координат, и пусть ось вращения совпадает с осью Ox (рис. 225). Обозначим через α угол, образованный осью Ox и касательной AS в произвольной точке сечения $M(x; y)$. Наша цель — найти форму сечения, т. е. зависимость координаты y от координаты x : $y = y(x)$. Ломаная OMT изображает путь луча, исходящего из источника света в точке O и отражающегося в точке M от поверхности зеркала параллельно оси Ox . Проведем нормаль MN и опустим из точки M на ось Ox перпендикуляр MP . Так как $\angle AMO = \angle TMS$ (угол падения равен углу отражения), то $\angle OMN = \angle NMT = \angle ONM$. Следовательно, $\triangle NOM$ равнобедренный и $OM = ON$. Кроме того, по построению $\angle PMN = \alpha$. Используя равенства $ON = PN - PO$, $PN = y \operatorname{tg} \alpha$, $PO = -x$, $ON = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, приходим к соотношению

$$ON = y \operatorname{tg} \alpha + x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда, учитывая геометрический смысл производной ($\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$), для определения зависимости y от x получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$x + \frac{dy}{dx} y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом. Умножим обе его части на $2 dx$:

$$2x dx + 2y dy = 2\sqrt{x^2 + y^2} dx \text{ или } d(x^2 + y^2) = 2\sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

Используя подстановку $z = x^2 + y^2$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$dz = 2\sqrt{z} dx,$$

которое можно преобразовать к виду

$$z^{-1/2} dz = 2 dx, \text{ откуда } \sqrt{z} = x + C.$$

Заменяя переменную z ее выражением через x и y , получаем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем

$$y^2 = 2C(x + C/2).$$

Таким образом, искомая кривая — парабола с параметром $p = C$ и вершиной, лежащей на отрицательной полуоси Ox на расстоянии $C/2$ от начала координат (рис. 226). Следовательно, искомая отражательная поверхность — *параболоид вращения*.

Задача о радиоактивном распаде. Экспериментальным путем установлено, что скорость распада радиоактивного вещества, т. е. скорость изменения его массы в зависимости от времени, прямо пропорциональна его количеству. Установим закон изменения массы m радиоактивного вещества в зависимости от времени t , считая, что начальная масса вещества при $t=0$ была m_0 .

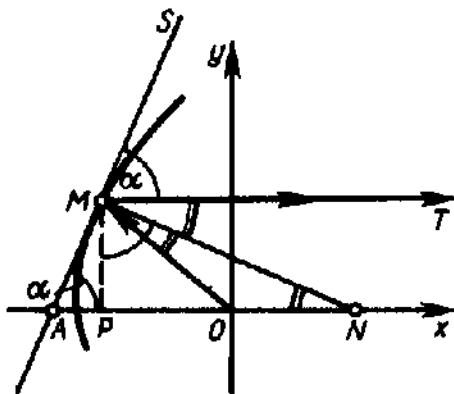


Рис. 225

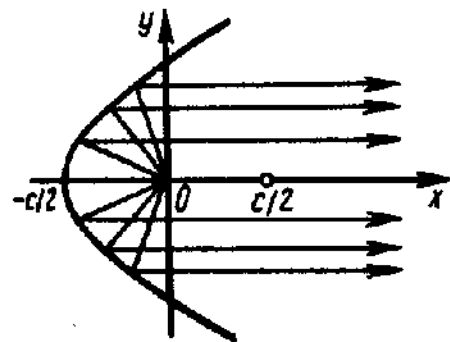


Рис. 226

Пусть в момент времени t масса вещества есть m , в момент времени $t + \Delta t$ масса составляет $m - \Delta m$. За время Δt распадается масса Δm . Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ — средняя скорость распада за время Δt ,

а $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ — мгновенная скорость распада в момент времени t .

Согласно условию

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (23)$$

где k — коэффициент пропорциональности (знак минус взят потому, что масса вещества убывает с течением времени, а производная убывающей функции отрицательна). Получено дифференциальное уравнение первого порядка, из которого надо найти зависимость массы m от времени t .

Решая уравнение, находим

$$\frac{dm}{m} = -k dt, \ln m = -kt + \ln C,$$

откуда

$$m = Ce^{-kt}. \quad (24)$$

Формула (24) дает зависимость массы вещества как функции времени. В данной задаче постоянная C имеет определенное значение, а именно при $t=0$ получаем: $m_0 = Ce^0 = C$. Подставляя это значение C в формулу (24), получаем искомую зависимость массы радиоактивного вещества от времени:

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (25)$$

Равенство (24) представляет собой общее решение дифференциального уравнения, а равенство (25) — частное решение, отвечающее начальным условиям данной задачи.

Коэффициент k определяется экспериментально. Например, для радия $k \approx 0,000447$. Промежуток времени T , за который распадается половина первоначальной массы радиоактивного вещества, называют *периодом полураспада* этого вещества. Подставляя в формулу (25) вместо m значение $m_0/2$, вместо k — значение $0,000447$, получаем уравнение для определения периода полураспада T радия:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,000447 T}, \quad -0,000447 T = -\ln 2,$$

откуда

$$T = \frac{\ln 2}{0,000447}; \quad T \approx 1550 \text{ лет.}$$

Задача о законе «естественного роста». Закон «естественного роста» — это закон, согласно которому скорость «роста» вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдем формулу для определения изменения количества вещества y в зависимости от времени t , считая, что в начальный момент $t=0$ количество вещества было равно y_0 .

Здесь независимой переменной является время t , а искомой величиной — количество вещества в любой момент времени. Скорость «роста» вещества есть скорость изменения величины y в зависимости от переменной t .

Используя, как и в предыдущей задаче, физический смысл производной, можно записать закон «естественного роста» следующим образом:

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad (26)$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Уравнение (26), отличающееся только знаком правой части от уравнения (23), описывает многие процессы «размножения».

Решение уравнения (26), удовлетворяющее заданным начальным условиям $t=0$, $y=y_0$, имеет вид

$$y = y_0 e^{kt}. \quad (27)$$

Формула (27) и выражает закон «естественного роста». Согласно этому закону, например, происходит «размножение» нейтронов в ядерных реакциях, размножение бактерий, рост кристаллов и т. п.

§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

1. Основные понятия. Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где x — независимая переменная; y — искомая функция; y' и y'' — ее производные, называется дифференциальным уравнением второго порядка.

Обычно изучают уравнения, которые могут быть записаны в виде, разрешенном относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1)$$

Так же как и для дифференциального уравнения первого порядка, решением уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. График решения называется также интегральной кривой.

Для уравнения второго порядка имеет место теорема существования и единственности решения (теорема Коши), аналогичная соответствующей теореме для уравнения первого порядка.

Теорема 15.2 (теорема Коши). Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ определены и непрерывны в некоторой области G пространства переменных (x, y, y') , то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0, y'_0) области G , в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее условиям

$$y = y_0, y' = y'_0 \text{ при } x = x_0. \quad (2)$$

Геометрически это означает, что через заданную точку (x_0, y_0) плоскости проходит единственная интегральная кривая с заданным угловым коэффициентом y'_0 касательной в этой точке.

Условия (2) называют начальными условиями решения и часто записывают в виде

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, y' \Big|_{x=x_0} = y'_0. \quad (3)$$

Как и для уравнения первого порядка, задачу отыскания решения по заданным начальным условиям называют задачей Коши.

Дадим теперь определения общего и частного решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям теоремы Коши.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , называется общим решением уравнения (1) в некоторой области G , если она является решением уравнения (1) при любых значениях постоянных C_1 и C_2 и если при любых начальных условиях (3) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ уравнения (1) при определенных значениях постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, называется *частным решением*.

Рассмотрим, например, уравнение $y'' = 2$. Это уравнение второго порядка. Так как функции $f(x, y, y') = 2, f_y(x, y, y') = 0$ и $f_{y'}(x, y, y') = 0$ определены и непрерывны во всем пространстве переменных $(x; y; y')$, то оно удовлетворяет во всем пространстве требованиям теоремы Коши.

Общее решение данного уравнения найдем двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя, находим сначала первую производную $y' = 2x + C_1$, а затем и общее решение:

$$y = x^2 + C_1x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Геометрически общее решение представляет собой семейство парабол, причем так как оно зависит от двух произвольных постоянных, то через каждую точку плоскости проходит бесконечное множество парабол, имеющих различные касательные в этой точке. Поэтому для выделения одной параболы из полученного семейства кроме точки $(x_0; y_0)$, через которую проходит парабола, нужно задать еще угловой коэффициент y'_0 касательной к параболе в этой точке.

Найдем, например, частное решение данного уравнения при начальных условиях $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 1$. Подставляя эти значения в выражения для общего решения $y = x^2 + C_1x + C_2$ и его производной $y' = 2x + C_1$, для определения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 1 + C_1 + C_2, \\ 1 = 2 + C_1, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = -1$ и $C_2 = 1$. Следовательно, искомым частным решением является функция

$$y = x^2 - x + 1,$$

график которой — парабола, проходящая через точку $(1; 1)$ с угловым коэффициентом в этой точке, равным единице.

2. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Рассмотрим три частных случая, когда решение уравнения (1) с помощью замены переменной сводится к решению уравнения первого порядка. Такое преобразование уравнения (1) называется *понижением порядка*.

1) Уравнение вида $y'' = f(x)$. Уравнение не содержит y и y' . Введем новую функцию $z(x)$, полагая $z(x) = y'$. Тогда $z'(x) = y''$, и уравнение превращается в уравнение первого порядка: $z'(x) = f(x)$ с искомой функцией $z(x)$. Решая его, находим: $z(x) = \int f(x) dx + C_1$. Так как $z(x) = y'$, то $y' = \int f(x) dx + C_1$.

Отсюда, интегрируя еще раз, получаем искомое решение:

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = x$.

Решение. Полагая $z(x) = y'$, получаем уравнение первого порядка $z'(x) = x$. Интегрируя его, найдем $z(x) = x^2/2 + C_1$. Заменяя $z(x)$ на y' и интегрируя еще раз, находим искомое общее решение:

$$y = \int \left[\frac{x^2}{2} + C_1 \right] dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

2) Уравнение вида $y'' = f(x, y')$. Уравнение не содержит y . Положим, как и в предыдущем случае, $z(x) = y'$; тогда $z'(x) = y''$, и уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно $z(x)$: $z' = f(x, z)$. Решая его, найдем $z(x) = \varphi(x, C_1)$. Так как $z(x) = y'$, то $y' = \varphi(x, C_1)$. Отсюда, интегрируя еще раз, получаем искомое решение

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 3\frac{y'}{x} = x$.

Решение. Полагая $z(x) = y'$, получаем линейное уравнение первого порядка $z' - 3\frac{z}{x} = x$. Решая его, найдем $z(x) = C_1 x^3 - x^2$.

Тогда $y' = C_1 x^3 - x^2$ и $y = C_1 \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_2$ — искомое решение.

3) Уравнение вида $y'' = f(y, y')$. Уравнение не содержит x . Вводим новую функцию $z(y)$, полагая $y' = z$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z(y).$$

Подставляя в уравнение выражения для y' и y'' , получаем уравнение первого порядка относительно z как функции от y :

$$z \frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Решая его, найдем $z = \varphi(y, C_1)$. Так как $z = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$.

Отсюда $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$. Получено уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим общее решение данного уравнения:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $yy'' - 2y'^2 = 0$.

Решение. Полагая $y' = z(y)$ и учитывая, что $y'' = z \frac{dz}{dy}$, получаем $zy \frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$. Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приводя его к виду $\frac{dz}{z} = \frac{2 dy}{y}$ и интегрируя, имеем $\ln |z| = 2 \ln |y| + \ln |C_1|$, откуда $z = C_1 y^2$. Учитывая, что $z = \frac{dy}{dx}$, находим: $\frac{dy}{y^2} = C_1 dx$, откуда получаем искомое решение

$$-1/y = C_1 x + C_2 \text{ или } y = -1/(C_1 x + C_2).$$

При сокращении на z было потеряно решение уравнения $z = y' = 0$, т. е. $y = C = \text{const}$. В данном случае оно содержится в общем решении, так как получается из него при $C_1 = 0$ (за исключением решения $y = 0$).

3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Ограничимся только основными определениями и общими замечаниями, относящимися к дифференциальным уравнениям n -го порядка.

Дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

или, если оно разрешено относительно старшей производной,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4)$$

Решением уравнения (4), как и уравнений первого и второго порядков, называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Теорема существования и единственности решения уравнения (4) аналогична соответствующим теоремам, приведенным ранее для случаев $n = 1$ и $n = 2$.

Общее решение уравнения (4) зависит от x и n произвольных постоянных и может быть записано в виде

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Решения, получающиеся из общего при определенных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называются частными решениями уравнения (4). Чтобы выделить частное решение уравнения из общего (4), можно задать начальные условия

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, y' \Big|_{x=x_0} = y'_0, y'' \Big|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (5)$$

Отыскание решения уравнения (4), удовлетворяющего заданным начальным условиям (5), называется решением задачи Коши для этого уравнения.

Простейшим уравнением вида (4) является уравнение, в котором правая часть зависит только от x , т. е. уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \quad (6)$$

Это уравнение легко решается. Действительно, интегрируя после-

довательно n раз, получаем

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2,$$

$$\dots \dots \dots y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n, \quad (7)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные. Функция (7) и является общим решением уравнения (6).

Пример 4. Найти общее решение уравнения третьего порядка $y''' = e^x$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = 1$.

Решение. Последовательно интегрируя, находим $y'' = e^x + C_1$, $y' = e^x + C_1 x + C_2$. Интегрируя еще раз, получаем общее решение данного уравнения: $y = e^x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Подставляя в выражения для y, y', y'' начальные условия, имеем: $0 = 1 + C_3$, $0 = 1 + C_2$, $1 = 1 + C_1$, откуда находим $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, $C_3 = -1$. Итак, $y = e^x - x - 1$ — искомое частное решение.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка в теории дифференциальных уравнений занимают важное место не только потому, что представляют собой простой и хорошо изученный тип уравнений, но и потому, что многие практические задачи физики, механики, техники и особенно электротехники приводят к решению этих уравнений.

1. Основные понятия. Определение. Уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1)$$

где y — искомая функция, а $p(x), q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции на некотором интервале (a, b) , называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется *линейным однородным уравнением*. Если же $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным уравнением*.

Разрешая уравнение (1) относительно y'' : $y'' = -p(x)y' - q(x)y + f(x)$, видим, что оно является частным случаем уравнения $y'' = f(x, y, y')$ и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения. Действительно, функция $f(x, y, y') = -p(x)y' - q(x)y + f(x)$ — непрерывная как функция трех переменных x, y и y' (она зависит от y и y' линейно, а функции $p(x), q(x)$ и $f(x)$ непрерывны по условию), частные производные $f'_y(x, y, y') = -q(x)$ и $f'_{y'}(x, y, y') = -p(x)$ также являются непрерывными функциями трех переменных x, y и y' (от y и y' $p(x)$ и $q(x)$ не зависят, а как функции x непрерывны по условию). Поэтому при любых начальных условиях $y|_{x=x_0} = y_0$,

$y' \Big|_{x=x_0} = y'_0$, где $x_0 \in (a, b)$, уравнение (1) имеет единственное решение задачи Коши.

Изучение линейных дифференциальных уравнений мы начнем с однородных уравнений.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Рассмотрим некоторые свойства решений линейных однородных уравнений.

Теорема 15.3. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2)$$

то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является решением уравнения (2).

Доказательство. Продифференцировав дважды функцию $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и подставив выражения для y , y' и y'' в левую часть уравнения (2), получим

$$C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + p(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) + q(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) = \\ = C_1 [y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + C_2 [y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)].$$

Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по условию являются решениями уравнения (2), то выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю, а это значит, что функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — решение уравнения (2). ■

Итак, функция вида $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ с произвольными постоянными C_1 и C_2 является решением уравнения (2). Естественно возникает вопрос, не является ли это решение общим решением уравнения (2). Докажем, что при некоторых условиях функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ является общим решением уравнения (2). Предварительно введем понятия линейной зависимости и линейной независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на (a, b) , если существуют такие числа α_1 и α_2 , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для любого $x \in (a, b)$ имеет место равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы, то они пропорциональны. Действительно, если $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$, причем $\alpha_1 \neq 0$ и $y_2(x) \neq 0$, то $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{const}$. Верно и обратное.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на (a, b) , если не существует таких чисел α_1 и α_2 , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для любого $x \in (a, b)$ имеет место равенство (3).

Другими словами, равенство (3) выполняется сразу для всех $x \in (a, b)$, если только $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Очевидно, что если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, то их отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, т. е. они не пропорциональны.

Так, например, функции $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x^3$ линейно незави-

симы на любом интервале (a, b) , поскольку $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{x} \neq \text{const}$, а функции $y_1(x) = 4x^2$ и $y_2(x) = x^2$ линейно зависимы на любом промежутке, так как $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 4 = \text{const}$.

Предположим теперь, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (2). Вопрос о том, являются ли они линейно зависимыми или линейно независимыми, решают с помощью *определителя Вронского**:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'. \quad (4)$$

Определитель Вронского (или вронскиан) является функцией, определенной на (a, b) , и обозначается $W(y_1, y_2)$ или просто $W(x)$.

Теорема 15.4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на (a, b) , то определитель Вронского, составленный из них, равен нулю на этом интервале.

Доказательство. Так как по условию функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы, то по определению существуют числа α_1 и α_2 , из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что имеет место равенство (3): $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из равенства (3) следует, что

$$y_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2(x), \quad y_1'(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2'(x).$$

Подставляя выражения для $y_1(x)$ и $y_1'(x)$ в определитель Вронского, получаем

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$$

Теорема 15.5. Если решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2) линейно независимы на (a, b) , то определитель Вронского, составленный из них, отличен от нуля на этом интервале.

Доказательство. Допустим обратное, т. е. предположим, что существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой определитель Вронского $W(x_0) = 0$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

в которой α_1 и α_2 — неизвестные числа. Так как определитель этой системы $W(x_0) = 0$, то система (5) имеет (гл. 10, § 3, случай 2) не нулевое решение относительно α_1 и α_2 (т. е. хотя бы одно из этих

* Вронский Юзеф (1778–1853) — польский математик.

чисел отлично от нуля). Рассмотрим функцию

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x),$$

где α_1, α_2 — ненулевое решение системы (5).

По теореме 15.3 эта функция является решением уравнения (2). Кроме того, поскольку α_1, α_2 — решение системы (5), функция $y(x)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y \Big|_{x=x_0} = 0, y' \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (6)$$

Таким начальным условиям, очевидно, удовлетворяет решение $y(x) \equiv 0$. По теореме существования и единственности решение $y(x) \equiv 0$ является единственным решением уравнения (2) с начальными условиями (6). Следовательно, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ на интервале (a, b) , а это означает, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на (a, b) , что противоречит условию теоремы. Таким образом, $W(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. ■

Итак, установлено, что если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются на (a, b) решениями линейного однородного уравнения (2), то составленный из них определитель Вронского на (a, b) либо равен нулю ($y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы), либо отличен от нуля ($y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы).

Установим теперь, при каких условиях функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ является общим решением линейного однородного уравнения (2).

Теорема 15.6. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые на (a, b) решения уравнения (2), то функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (2).

Доказательство. Напомним, что в силу теоремы 15.3 функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ при любых значениях постоянных C_1 и C_2 является решением уравнения (2). Для того чтобы доказать, что эта функция — общее решение уравнения (2), достаточно установить, что из него можно выделить частное решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям.

Пусть $x_0 \in (a, b)$ и

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, y' \Big|_{x=x_0} = y'_0 \quad (8)$$

— произвольные начальные условия. Покажем, что постоянные C_1 и C_2 можно подобрать так, что решение (7) при этих значениях постоянных является частным решением, удовлетворяющим заданным начальным условиям (8).

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0), \end{cases} \quad (9)$$

в которой C_1 и C_2 — неизвестные числа. Определитель этой системы есть определитель Вронского $W(x_0)$. Так как по условию функции

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимы на (a, b) , то в силу теоремы 15.5 $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система (9) имеет единственное решение, которое обозначим $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. Подставляя C_1^0 и C_2^0 в равенство (7), получаем искомое частное решение уравнения (2): $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$, удовлетворяющее условиям (8). Это и означает, что решение (7) является общим решением уравнения (2). ■

Из доказанной теоремы следует, что для отыскания общего решения уравнения (2) достаточно найти два линейно независимых частных решения и составить выражения (7) с произвольными постоянными C_1 и C_2 .

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 0$.

Решение. Имеем линейное однородное уравнение. Легко заметить, что его частными решениями являются $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-x}$. Так как определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

отличен от нуля, то эти решения линейно независимы на всей числовой прямой. Следовательно, общее решение данного уравнения можно записать в виде $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В заключение покажем, как найти общее решение уравнения (2), если известно только одно частное решение этого уравнения.

Пусть $y_1(x)$ — частное решение уравнения (2). Введем новую функцию z , полагая $y = y_1 z$. Тогда $y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$. Подставляя выражения для y , y' и y'' в уравнение (2) и группируя слагаемые, получаем

$$[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]z + z'[2y_1' + p(x)y_1] + y_1 z'' = 0.$$

Так как $y_1(x)$ — решение уравнения (2), то выражение в первых квадратных скобках равно нулю и уравнение принимает вид

$$z'[2y_1' + p(x)y_1] + y_1 z'' = 0.$$

Порядок этого уравнения можно понизить, полагая $z' = u(x)$, где $u(x)$ — новая искомая функция:

$$u[2y_1' + p(x)y_1] + u'y_1 = 0.$$

Получено уравнение первого порядка относительно функции u с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$\int \frac{du}{u} = -2 \int \frac{dy_1}{y_1} - \int p(x) dx, \ln |u| = -2 \ln |y_1| - \int p(x) dx + \ln |C|,$$

$$u = \pm \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \text{ или } u = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx},$$

где C_1 — произвольная постоянная. Возвращаясь к переменной z и умножая выражение для z на y_1 , получаем общее решение урав-

нения (2):

$$y = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx + C_2 y_1,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В качестве примера найдите самостоятельно общее решение уравнения $y'' - y = 0$ (см. пример 1), взяв одно из его частных решений за известное.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка. Рассмотрим теперь основные свойства решений линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (1):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 15.7. *Общее решение уравнения (1) есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Доказательство. Пусть $\tilde{y}(x)$ — частное решение уравнения (1), а $Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (2), где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Покажем, что функция

$$y = \tilde{y}(x) + Y(x) \quad (10)$$

— решение уравнения (1). Для этого найдем $y' = \tilde{y}'(x) + Y'(x)$, $y'' = \tilde{y}''(x) + Y''(x)$ и подставим их в уравнение (1):

$$\begin{aligned} \tilde{y}''(x) + Y''(x) + p(x)[\tilde{y}'(x) + Y'(x)] + q(x)[\tilde{y}(x) + Y(x)] &= \\ &= [Y''(x) + p(x)Y'(x) + q(x)Y(x)] + \\ &+ [\tilde{y}''(x) + p(x)\tilde{y}'(x) + q(x)\tilde{y}(x)] = 0 + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $y = \tilde{y}(x) + Y(x)$ действительно решение уравнения (1).

Покажем теперь, что функция (10) — общее решение уравнения (1). Для этого возьмем любое решение y уравнения (1) и рассмотрим разность $y - \tilde{y}(x)$. Эта разность является решением однородного уравнения (2). Действительно,

$$\begin{aligned} [y - \tilde{y}(x)]'' + p(x)[y - \tilde{y}(x)]' + q(x)[y - \tilde{y}(x)] &= \\ = [y'' + p(x)y' + q(x)y] - [\tilde{y}''(x) + p(x)\tilde{y}'(x) + q(x)\tilde{y}(x)] &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что разность $y - \tilde{y}(x)$ может быть записана в виде

$$y - \tilde{y}(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x), \text{ откуда } y = \tilde{y}(x) + C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x),$$

где C_1^0 и C_2^0 — определение значения постоянных C_1 и C_2 . Итак, любое решение y уравнения (1) получается из формулы (10) при соответствующем подборе произвольных постоянных C_1 и C_2 , т. е. функция (10) является общим решением уравнения (1). ■

Таким образом, чтобы найти общее решение линейного неоднородного уравнения, нужно найти общее решение соответствующего

щего однородного уравнения и какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. В общем случае задача отыскания частного решения является сложной. Покажем, как можно найти частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть $Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — общее решение однородного уравнения (2). Будем искать частное решение неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \quad (11)$$

рассматривая C_1 и C_2 как некоторые искомые функции от x . Продифференцируем последнее равенство

$$y' = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x). \quad (12)$$

Подберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0. \quad (13)$$

Тогда равенство (12) принимает вид

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Дифференцируя это равенство, найдем y'' :

$$y'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Подставляя выражения для y , y' и y'' в уравнение (1) и группируя слагаемые, получаем

$$C_1(x) [y_1''(x) + p(x) y_1'(x) + q(x) y_1(x)] + C_2(x) [y_2''(x) + p(x) y_2'(x) + q(x) y_2(x)] + C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Выражения в квадратных скобках равны нулю, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения однородного уравнения. Поэтому последнее равенство принимает вид

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \quad (14)$$

Таким образом, функция (11) является решением уравнения (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют уравнениям (13) и (14). Объединяя их, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x), \end{cases} \quad (15)$$

в которой $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ — неизвестны, а $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ и $f(x)$ — известны. Так как определителем этой системы является определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

составленный из линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (2), то он по теореме 15.5 не равен нулю, а зна-

чит, система (15) имеет единственное решение относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Решая эту систему, получаем

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, откуда, интегрируя, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Подставляя полученные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенство (11), получаем искомое частное решение уравнения (1).

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y'' - y = x$.

Решение. В примере 1 п. 2 было найдено общее решение $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{y}(x) = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}. \quad (16)$$

Система (15) для нахождения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0, \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = x. \end{cases}$$

Складывая эти уравнения, найдем $C_1'(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$. Отсюда, интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} (x + 1) e^{-x}.$$

Произвольную постоянную не пишем, так как ищем какое-нибудь частное решение. Подставляя выражение $C_1'(x)$ в первое из уравнений системы, найдем $C_2'(x) = -\frac{1}{2} x e^x$, откуда, интегрируя, получаем

$$C_2(x) = -\frac{1}{2} (x - 1) e^x.$$

Подставляя найденные выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенство (16), получаем частное решение $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}(x) = \left[-\frac{1}{2} (x + 1) e^{-x} \right] e^x + \left[-\frac{1}{2} (x - 1) e^x \right] e^{-x} = -x.$$

Заметим, что, найдя частное решение неоднородного уравнения и зная общее решение соответствующего однородного уравнения, на основании равенства (10) можно записать общее решение данного неоднородного уравнения:

$$y = \tilde{y}(x) + Y(x) = -x + C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим важный частный случай линейных дифференциальных уравнений второго порядка — случай, когда функции $p(x)$ и $q(x)$ являются постоянными величинами. Такие уравнения называются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

где p и q — вещественные числа.

Теорема 15.8. 1) Если число k — вещественный корень уравнения

$$k^2 + pk + q = 0, \quad (2)$$

то функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (1).

2) Если числа $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) — комплексные корни уравнения (2), то функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ являются решениями уравнения (1).

Доказательство. 1) Пусть $y = e^{kx}$ ($k = \text{const}$). Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставляя y , y' и y'' в уравнение (1), получаем

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то, сокращая на e^{kx} , имеем

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Следовательно, если k является корнем уравнения (2), то функция $y = e^{kx}$ — решение уравнения (1).

2) Аналогично случаю 1) можно проверить, что функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ удовлетворяют уравнению (1). ■

Уравнение (2) называется **характеристическим уравнением** данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением и, следовательно, имеет два корня. Обозначим их k_1 и k_2 .

Теорема 15.9. 1) Если корни характеристического уравнения вещественные и различные ($k_1 \neq k_2$), то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) если корни характеристического уравнения вещественные и равные ($k_1 = k_2$), то общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x};$$

3) если корни характеристического уравнения комплексные ($k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$), то общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Доказательство. 1) Пусть корни k_1 и k_2 различны. По теореме 15.8 функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ — частные решения уравнения (1). Эти решения линейно независимы, так как $y_2/y_1 = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}$ ($k_1 \neq k_2$). Следовательно, по теореме 15.6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) Пусть корни k_1 и k_2 равны: $k_1 = k_2$. По теореме 15.8 функция $y_1 = e^{k_1 x}$ — частное решение уравнения (1). Найдем второе частное решение, линейно независимое с первым. Будем искать его в виде $y_2 = z(x) e^{k_1 x}$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Дифференцируя, имеем

$$y_2' = z' e^{k_1 x} + k_1 z e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (z' + k_1 z),$$

$$y_2'' = z'' e^{k_1 x} + 2k_1 z' e^{k_1 x} + k_1^2 z e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (z'' + 2k_1 z' + k_1^2 z).$$

Подставляя y_2 , y_2' и y_2'' в левую часть уравнения (1), получаем

$$e^{k_1 x} \left[z'' + 2 \left(k_1 + \frac{p}{2} \right) z' + (k_1^2 + p k_1 + q) z \right] = 0.$$

По условию, $k_1^2 + p k_1 + q = 0$. Кроме того, $k_1 = k_2 = -p/2$, поэтому $k_1 + p/2 = 0$. Следовательно, для того чтобы найти функцию $z(x)$, надо решить уравнение $z'' = 0$. Последовательно интегрируя, получаем: $z' = \tilde{C}_1$, $z = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные. Полагая $\tilde{C}_1 = 1$, $\tilde{C}_2 = 0$, найдем $z(x) = x$. Таким образом, $y_2 = x e^{k_1 x}$ — второе частное решение уравнения (1). Решения y_1 и y_2 линейно независимы, так как $y_1/y_2 = 1/x \neq \text{const}$ и по теореме 15.6 общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

3) Пусть k_1 и k_2 — комплексно-сопряженные корни, т. е. $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$). Тогда по теореме 15.8 функции $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ являются частными решениями уравнения (1). Эти решения линейно независимы, так как $y_1/y_2 = \text{ctg } \beta x \neq \text{const}$. Поэтому общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \blacksquare$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 2 = 0$; его корни $k_1 = 1$, $k_2 = -2$ вещественные и различные. Соответствующие частные решения уравнения $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0$; его корни $k_1 = k_2 = 1$ вещественные и равные. Соответствующие частные решения уравнения $y_1 = e^x$, $y_2 = x e^x$. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + 13 = 0$; его корни $k_1 = 2 + i3$, $k_2 = 2 - i3$ комплексные. Соответствующие частные решения уравнения $y_1 = e^{2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{2x} \sin 3x$. Общее решение уравнения имеет вид $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (3)$$

где p и q — вещественные числа; $f(x)$ — непрерывная функция.

Как известно, общее решение такого уравнения представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы находить умеем, поэтому остается рассмотреть вопрос о нахождении частного решения. Для нахождения частного решения можно применять метод вариации произвольных постоянных. Однако если в правой части уравнения (3) — многочлен, либо показательная функция, либо тригонометрическая функция $\sin \beta x$ или $\cos \beta x$, либо линейная комбинация перечисленных функций, то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, не содержащим процесса интегрирования.

Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (3).

1) *Правая часть имеет вид*

$$f(x) = P_n(x),$$

где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ — многочлен степени n . Тогда частное решение $\tilde{y}$ можно искать в виде

$$\tilde{y} = Q_n(x) x^r,$$

где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r — число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x + 1$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y = (C_1 + C_2 x) e^x$ (см. пример 2). Так как правая часть уравнения — многочлен первой степени и ни один из корней характеристического уравнения $k^2 - 2k + 1 = 0$ не равен нулю ($k_2 = k_1 = 1$), то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = (Ax + B) x^0 = Ax + B,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y} = Ax + B$ и подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в данное уравнение, найдем

$$-2A + Ax + B = x + 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства: $A = 1$, $-2A + B = 1$, находим: $A = 1$, $B = 3$. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\tilde{y} = x + 3$,

а его общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + (x + 3).$$

2) Правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n . Тогда частное решение $\tilde{y}$ следует искать в виде

$$\tilde{y} = Q_r(x) x^r e^{\alpha x},$$

где $Q_r(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r — число корней характеристического уравнения равных α . Если $\alpha = 0$, то $f(x) = P_n(x)$, т. е. имеет место случай 1).

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. В правой части этого уравнения — произведение многочлена первой степени на показательную функцию $e^{\alpha x}$ при $\alpha = 1$. Так как среди корней характеристического уравнения имеется только один корень $k_1 = \alpha = 1$, то $r = 1$. В данном случае $P_n(x) = x$ — многочлен первой степени. Поэтому частное решение данного уравнения ищем в виде

$$\tilde{y} = (Ax + B) x e^x = (Ax^2 + Bx) e^x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$-4Ax + 2A - 2B = x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства: $-4A = 1$, $2A - 2B = 0$, находим: $A = -1/4$, $B = -1/4$. Подставляя найденные значения A и B в выражение для $\tilde{y}$, получаем частное решение данного уравнения $\tilde{y} = -(1/4)(x^2 + x) e^x$; общее решение имеет вид

$$y = \tilde{y} + Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x) e^x.$$

3) Правая часть имеет вид

$$f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x,$$

где a , b и β — известные числа. Тогда частное решение $\tilde{y}$ надо искать в виде

$$\tilde{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) x^r,$$

где A и B — неизвестные коэффициенты, а r — число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. В правой части

равенства — тригонометрическая функция $\sin x$, т. е. $a=0$, $b=1$, $\beta=1$. Так как $i\beta=i$ — корень характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение надо искать в виде

$$\tilde{y} = (A \cos x + B \sin x) x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$2(-A \sin x + B \cos x) = \sin x,$$

откуда $A=-1/2$, $B=0$. Таким образом, частное решение $\tilde{y} = -(1/2)x \cos x$; общее решение уравнения

$$y = \tilde{y} + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \sin 2x$.

Решение. Данное уравнение отличается от предыдущего только тем, что $\beta=2$. Так как $i\beta=i2$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$ и частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x = \sin 2x,$$

откуда $A=0$, $B=-1/3$, т. е. частное решение $\tilde{y} = -(1/3) \sin 2x$, общее решение уравнения

$$y = \tilde{y} + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x.$$

4) Правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x],$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n , а $P_m(x)$ — многочлен степени m . Тогда частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены степени s , $s = \max\{n, m\}$, а r — число корней характеристического уравнения, равных $\alpha + i\beta$.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$.

Решение. Здесь характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-1$. Общее решение однородного уравнения таково: $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. В правой части уравнения — произведение многочлена нулевой степени, показательной и тригонометрической функций, так что $P_n(x)=3$, $P_m(x)=0$, $s=0$. Число $\alpha + i\beta = 2 + i1$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r=0$, и частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = e^{2x} (A \cos x + B \sin x).$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, получаем

$$(2A + 4B) \cos x + (2B - 4A) \sin x = 3 \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, находим

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0,$$

откуда $A=3/10$, $B=3/5$. Таким образом, частное решение $\tilde{y}=e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$, а общее решение уравнения

$$y = \tilde{y} + Y = e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right) + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Пример 9. По данным корням характеристического уравнения и правой части $f(x)$ записать частное решение $\tilde{y}$ линейного неоднородного уравнения:

а) $k_1=3+i2$, $k_2=3-i2$, $f(x)=8e^{3x}\sin 2x$;

б) $k_1=k_2=-3$, $f(x)=2xe^{-3x}\sin x$;

в) $k_1=1$, $k_2=-3$, $f(x)=e^x(1-x)\cos 3x$;

г) $k_1=1+i2$, $k_2=1-i2$, $f(x)=e^x(\cos 2x-3\sin 2x)$;

д) $k_1=2+i\frac{1}{2}$, $k_2=2-i\frac{1}{2}$, $f(x)=e^{2x}\left[(x^3-1)\cos \frac{x}{2} + x\sin \frac{x}{2}\right]$.

Решение. а) Имеем: $\alpha=3$, $\beta=2$, $P_n(x)=0$, $P_m(x)=8$, $s=0$. Так как число $\alpha+i\beta=3+i2$ — корень характеристического уравнения, то $r=1$. Поэтому $\tilde{y}=xe^{3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$;

б) имеем: $\alpha=-3$, $\beta=1$, $P_n(x)=0$, $P_m(x)=2x$, $m=1$, $s=1$. Число $\alpha+i\beta=-3+i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r=0$. Следовательно $\tilde{y}=e^{-3x}[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x]$;

в) имеем: $\alpha=1$, $\beta=3$, $P_n(x)=1$, $P_m(x)=0$, $n=1$, $s=1$. Так как число $\alpha+i\beta=1+i3$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$. Поэтому $\tilde{y}=e^x[(Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x]$;

г) имеем: $\alpha=1$, $\beta=2$, $P_n(x)=1$, $P_m(x)=-3$, $s=0$. Число $\alpha+i\beta=1+i2$ — корень характеристического уравнения, поэтому $r=1$. Следовательно, $\tilde{y}=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$;

д) имеем: $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{2}$, $P_n(x)=(x^3-1)$, $P_m(x)=x$, $n=3$, $m=1$, $s=3$. Число $\alpha+i\beta=2+i\frac{1}{2}$ — корень характеристического уравнения, значит, $r=1$. Следовательно, $\tilde{y}=xe^{2x}[(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\cos \frac{x}{2} + (Ex^3+Fx^2+Gx+H)\sin \frac{x}{2}]$.

В заключение докажем теорему, которую часто применяют при решении линейных неоднородных уравнений, в правой части которых сумма нескольких слагаемых.

Теорема 15.10. Если $\tilde{y}_1$ — решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \quad (4)$$

а $\tilde{y}_2$ — решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x), \quad (5)$$

то сумма $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ является решением уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \quad (6)$$

Доказательство. Составим сумму $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ и подставим ее в левую часть уравнения (6). Получим

$$\begin{aligned} & (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)'' + p(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)' + q(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \\ & = (\tilde{y}_1'' + p\tilde{y}_1' + q\tilde{y}_1) + (\tilde{y}_2'' + p\tilde{y}_2' + q\tilde{y}_2) = f_1 + f_2 \end{aligned}$$

так как по условию выражение в первой скобке равно $f_1(x)$, а выражение во второй скобке равно $f_2(x)$. Следовательно, $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ — решение уравнения (6). ■

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $Y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Так как правая часть уравнения состоит из суммы двух функций $\sin x$ и e^{-x} , то в соответствии с теоремой 15.10 частное решение данного уравнения можно искать в виде

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1$ — частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$, а $\tilde{y}_2$ — частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

Сначала найдем частное решение $\tilde{y}_1$. Так как число $i\beta = i$ не является корнем характеристического уравнения ($r=0$), то частное решение $\tilde{y}_1$ будем искать в виде $\tilde{y}_1 = A \sin x + B \cos x$. Подставляя $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_1'$ и $\tilde{y}_1''$ в уравнение $y'' - 2y' + y = \sin x$ и сравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получаем $-2A = 0$, $2B = 1$, откуда $A = 0$, $B = 1/2$ и, следовательно, $\tilde{y}_1 = (1/2) \cos x$.

Теперь найдем частное решение $\tilde{y}_2$. Будем его искать в виде $\tilde{y}_2 = A e^{-x}$, так как число $\alpha = -1$ не является корнем характеристического уравнения. Подставляя $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_2'$ и $\tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' - 2y' + y = e^{-x}$, имеем $A = 1/4$. Следовательно, $\tilde{y}_2 = (1/4) e^{-x}$.

Таким образом, частное решение данного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x},$$

а общее решение этого уравнения

$$y = \tilde{y} + Y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x} + C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

§ 5. Применение линейных дифференциальных уравнений к изучению колебательных явлений

Линейные дифференциальные уравнения являются мощным аппаратом в решении задач о колебаниях, занимающих значительное место в современной технике и физике. Познакомимся с одной из них — с задачей о колебании груза, подвешенного на вертикальной пружине.

Постановка задачи. Пусть груз массой m , подвешенный на пружине, движется по вертикальной прямой. Если пружину с грузом оттянуть или сжать, то груз начнет совершать колебания

около положения равновесия. Установим закон движения груза, т. е. найдем формулу, выражающую отклонение груза от положения равновесия в любой момент времени t .

Совместим начало координат с положением равновесия груза а ось Oy направим вертикально вверх. Обозначим через l_0 расстояние от конца нерастянутой пружины без груза до положения равновесия груза, а через y — отклонение груза от положения равновесия в момент времени t (рис. 227). На груз действует сила, равная сумме

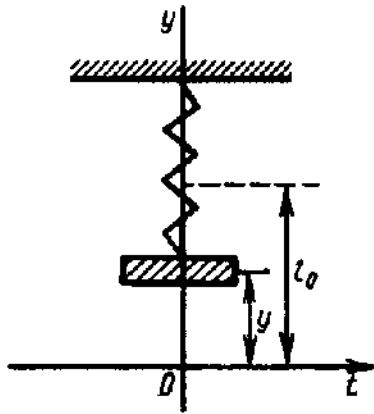


Рис. 227

следующих трех сил: 1) силы тяжести груза mg , направленной вниз; 2) силы сопротивления среды, направленной в сторону, противоположную движению груза, и по величине пропорциональной скорости движения груза, т. е. равной $\lambda \frac{dy}{dt}$, где λ — коэффициент пропорциональности; 3) упругой силы пружины, направленной вверх (т. е. в положительном направлении оси Oy), величина которой, по закону Гука *, пропорциональна деформации, т. е. равна $c(l_0 - y)$, где c — коэффициент пропор-

циональности, называемый коэффициентом жесткости пружины (масса пружины не учитывается).

Согласно второму закону Ньютона получаем следующее уравнение движения груза:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = c(l_0 - y) - mg - \lambda \frac{dy}{dt}.$$

Так как в положении равновесия ($y=0$) вес груза mg уравновешивается упругой силой пружины, то $mg = cl_0$. Поэтому

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -cy - \lambda \frac{dy}{dt} \text{ или}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + cy = 0. \quad (1)$$

Получено дифференциальное уравнение, которое называется *уравнением свободных колебаний груза, подвешенного на пружине*.

Если на груз действует внешняя сила, направленная вертикально (вдоль оси Oy), величина которой $F(t)$ зависит от времени t , то уравнение (1) принимает вид

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + cy = F(t). \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *уравнением вынужденных колебаний груза, подвешенного на пружине*.

Разделив все члены уравнения (2) на m и обозначая $\frac{c}{m} = \omega^2$, $\frac{\lambda}{m} = 2\mu$, $\frac{F(t)}{m} = f(t)$, получаем окончательный вид уравнения вы-

* Гук Роберт (1635—1703) — английский физик.

нужденных колебаний:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t). \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой *линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Перейдем теперь к исследованию колебаний, применяя известные решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

С в о б о д н ы е к о л е б а н и я. Пусть отсутствуют внешняя сила $f(t)$ и сопротивление среды ($\mu=0$). Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

Это линейное однородное уравнение. Характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_1 = i\omega$, $k_2 = -i\omega$ и общее решение уравнения определяется формулой

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для удобства дальнейших рассуждений заменим произвольные постоянные C_1 и C_2 постоянными $A > 0$ и φ , полагая $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$ (отсюда $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и $\operatorname{tg} \varphi = C_1/C_2$). Тогда

$$y = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t,$$

и общее решение можно записать в виде

$$y = A \sin (\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Формула (4) выражает закон движения груза, подвешенного на пружине, т. е. отклонение y груза от положения равновесия в любой момент времени t . Согласно этой формуле груз совершает, как говорят, свободные гармонические колебания около положения равновесия. Величина A называется *амплитудой колебаний*, ω — *частотой колебаний* и φ — *начальной фазой*.

Для того чтобы выделить из общего решения частное, необходимо задать начальные условия движения. Пусть в начальный момент времени $t=0$ отклонение и скорость груза известны:

$$y \Big|_{t=0} = y_0, \quad y' \Big|_{t=0} = y'_0. \quad (5)$$

Тогда, дифференцируя, получаем

$$y' = A\omega \cos (\omega t + \varphi); \quad (6)$$

подставляя начальные условия (5) в (4) и (6), имеем

$$\begin{cases} y_0 = A \sin \varphi, \\ y'_0 = A\omega \cos \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда, выражая произвольные постоянные A и φ через ω , y_0 и y'_0 и подставляя их значения в (4), получаем искомое частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (5).

Из формул (7), в частности, следует, что постоянные A и φ зависят от частоты колебаний ω и начальных условий движения. Частота же колебаний не зависит от начальных условий, а зависит от отношения коэффициента жесткости пружины к массе груза ($\omega = \sqrt{c/m}$).

Пусть теперь отсутствует внешняя сила $f(t)$, но имеет место сопротивление среды ($\mu \neq 0$), например сопротивление воздуха. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\mu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 2\mu k + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$. Здесь возможны три случая.

1) $\mu > \omega$. Тогда корни $k_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ и $k_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ — вещественные, различные и отрицательные. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y = C_1 e^{(-\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})t}.$$

Из полученной формулы следует, что груз колебаний не совершает, при неограниченном возрастании t отклонение груза y бесконечно долго приближается к положению равновесия ($y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). В этом случае говорят, что груз совершает неперiodическое затухающее движение.

2) $\mu = \omega$. Тогда корни $k_1 = k_2 = -\mu$ — вещественные равные и отрицательные. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y = C_1 e^{-\mu t} + C_2 t e^{-\mu t} = e^{-\mu t} (C_1 + C_2 t).$$

В этом случае груз совершает движение, аналогичное предыдущему.

3) $\mu < \omega$. Тогда корни $k_1 = \mu + i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ и $k_2 = -\mu - i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ — комплексные. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y = e^{-\mu t} (C_1 \cos \bar{\omega} t + C_2 \sin \bar{\omega} t),$$

где $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$. Заменяя C_1 и C_2 на постоянные A и φ , запишем решение уравнения (8) в виде

$$y = A e^{-\mu t} \sin(\bar{\omega} t + \varphi).$$

Здесь, в отличие от формулы (4), амплитуда $A e^{-\mu t}$ зависит от времени t . Так как $\mu < 0$, то амплитуда стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому в данном случае груз совершает свободные затухающие колебания около положения равновесия.

Вынужденные колебания. Резонанс. Рассмотрим теперь случай, когда на колебательную систему действует периодическая внешняя сила $f(t) = a \sin \omega_1 t$, предполагая для простоты, что сопротивление среды отсутствует ($\mu = 0$). В этом случае уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = a \sin \omega_1 t. \quad (9)$$

Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Известно, что общее решение этого уравнения является суммой общего решения Y соответствующего однородного уравнения, которое было найдено выше [см. формулу (4)], и частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения, которое надо найти.

Рассмотрим отдельно два случая.

а) $\omega \neq \omega_1$, т. е. частота внешней периодической силы отлична от частоты свободных колебаний груза. Так как число $i\omega_1$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то частное решение можно найти в виде

$$\tilde{y} = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t.$$

Дифференцируя $\tilde{y}$ дважды и подставляя $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в уравнение (9), найдем: $B = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2}$, $A = 0$. Таким образом,

$$\tilde{y} = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t,$$

и общее решение уравнения (9) имеет вид

$$y = \tilde{y} + Y = \frac{a}{\omega^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + A \sin (\omega t + \varphi). \quad (10)$$

Как следует из формулы (10), частное решение $\tilde{y}$ определяет колебание системы, создаваемое внешней силой, общее решение $Y = A \sin (\omega t + \varphi)$ — свободное колебание груза, а общее решение y — сложное колебательное движение, получающееся в результате сложения двух колебаний с разными частотами ω и ω_1 .

В этом случае амплитуда постоянна, и если ω и ω_1 близки по величине, то груз совершает колебания около положения равновесия с большой амплитудой.

б) $\omega = \omega_1$, т. е. частота внешней периодической силы совпадает с частотой свободных колебаний груза. Так как $i\omega_1 = i\omega$ — корень характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то в этом случае частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = t (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Дифференцируя $\tilde{y}$ дважды и подставляя $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в уравнение (9), найдем: $A = -\frac{a}{2\omega}$, $B = 0$. Таким образом,

$$\tilde{y} = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t$$

и общее решение уравнения (9) имеет вид

$$y = \tilde{y} + Y = A \sin (\omega t + \varphi) - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t.$$

Как следует из найденной формулы, в данном случае, как и в предыдущем, имеет место сложное колебательное движение, получающееся в результате сложения двух колебаний, но с одинаковыми частотами.

Наличие множителя t во втором члене свидетельствует, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает при неограниченном возрастании времени t , т. е. груз будет совершать через некоторый промежуток времени колебания с очень большой амплитудой, даже если амплитуда a внешней силы мала. Это явление называется *резонансом*. Иногда оно приводит к разрушению колеблющихся систем.

На примере груза, подвешенного на пружине, рассмотрен случай механических колебаний упругих систем (к ним относится колебание на рессорах вагонов, автомобилей и т. п.). Аналогичное исследование проводится и при изучении электрических, звуковых и многих других колебаний. Главную роль в этих исследованиях играют линейные дифференциальные уравнения.

В заключение отметим, что изложенная теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка полностью переносится и на линейные дифференциальные уравнения любого порядка.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель Н.* 392
 Абсолютная величина числа 18
 Абсолютно сходящийся ряд 391, 406
 Абсцисса 35, 222
 Аксоны вещественных чисел 12
 Алгебраическая форма комплексного числа 403
 Алгебраический многочлен 72, 73, 89
 Алгебраическое дополнение 266
 Амплитуда колебаний 451
 Аналитическая функция 408
 Аналитический способ задания функции 70, 71
 Аппликата 222
 Аргумент 69, 276
 — комплексного числа 404
 Асимптота 146
 — гиперболы 57

 Базис 231
 Бесконечная производная 104
 Бесконечно большая последовательность 22, 23
 — — функция 83, 84
 — малая последовательность 23
 — — функция 82, 280
 Бесконечный предел 26
 — промежутки 16
Больцано Б. 92
 Большая полуось эллипса 54

Вейерштрасс К. 95
 Вектор 223
 Векторная величина 223
 — функция 369
 Векторное поле 369
 — произведение 235—239
 Вектор-столбец 261
 Вектор-строка 261
 Величина направленного отрезка 15
 Вертикальная асимптота 146
 Верхний предел интегрирования 178
 Верхняя грань множества 17
 — сторона поверхности 358
 — сумма Дарбу 180
 Вершина гиперболического параболоида 258
 — параболы 63
 — эллиптического параболоида 256
 Вершины гиперболы 58
 — эллипса 54
 Вещественная ось 402
 — часть комплексного числа 402
 Вещественные числа 11

 Взаимно обратные матрицы 273
 — — функции 103
 Внутренняя точка множества 283
 Возрастающая последовательность 30
 — функция 101
 Вронскиан 437
Вронский Ю. 437
 Второй замечательный предел 81
 Выпуклость вверх 143
 — вниз 143

Гамильтон У. 376
 Гармонический ряд 383
 Гармоническое поле 378
Гейне Г. 76
 Геометрический смысл двойного интеграла 308, 309
 — — дифференциала 110, 292, 293
 — — дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$ 420
 — — криволинейного интеграла первого рода 326
 — — определенного интеграла 198
 — — производной 104, 105
 — — смешанного произведения 239
 — — теорем Ферма, Ролля, Лагранжа 128—130
 Геометрическое изображение вещественных чисел 14, 15
 — — комплексных чисел 402, 403
 — — функции двух переменных 277, 278
 Гипербола 55
 Гиперболический параболоид 256
 — тип линий второго порядка 66, 67
 Главная диагональ матрицы 262
 — — определителя 263
 Главное значение аргумента комплексного числа 404
 Гладкая кривая 325
 — поверхность 353
 Горизонтальная асимптота 147
 Градиент 295
 Граница области 283
 Граничная точка области 283
 График 70
 Графический способ задания функции 72
Грин Д. 334
Гук Р. 450

Даламбер Ж. 385
Дарбу Г. 180

Двойной интеграл 307, 308
 — —, вычисление путем замены перемен-
 ной 314—316
 — —, — — сведения к повторному 310—
 314
 — —, геометрические приложения 317—
 320
 — —, основные свойства 309, 310
 — —, физические приложения 321—
 324
 Двуполостный гиперболоид 254
 Двусторонняя поверхность 356, 357
 Действительная ось гиперболы 58
 Декарт Р. 34
 Деление отрезка в данном отношении 36,
 37
 δ -окрестность точки 16, 278, 284
 Детерминант 263
 Диаметр области 307
 Дивергенция векторного поля 372
 Дирихле П. 71
 Директриса параболы 62
 Директрисы гиперболы 59
 — эллипса 59
 Дифференциал 109
 — высшего порядка 124, 125
 —, геометрический смысл 110
 —, применение к приближенным вычис-
 лениям 110, 111
 — функции двух переменных 291, 292,
 298
 Дифференциальное уравнение 417
 — — в полных дифференциалах 423,
 424
 — — второго порядка 431
 — — —, допускающее понижение по-
 рядка 432, 433
 — — — — линейное 435
 — — — — — неоднородное 435, 440—
 442
 — — — — — с постоянными коэффи-
 циентами 445—449
 — — — — — однородное 435—439
 — — — — — с постоянными коэффи-
 циентами 443, 444
 — — вынужденных колебаний 450, 451
 — — первого порядка 417
 — — — — линейное 422
 — — — — — неоднородное 422
 — — — — — однородное 422
 — — — —, разрешенное относительно
 производной 417
 — — свободных колебаний 450
 — — с разделяющимися переменными
 421
 — — n -го порядка 434
 Дифференцирование 108
 — обратной функции 114, 115
 —, основные правила 111, 112

— простейших элементарных функций
 112, 116, 119
 — сложной функции 116, 117, 288—290
 —, таблица производных простейших
 элементарных функций 120
 — функций, заданной параметрически
 126
 Дифференцируемая функция 107, 285
 Длина вектора 223
 — дуги 201, 203
 — направленного отрезка 15
 — частичного отрезка 177
 Дробно-рациональная функция 73, 89
 Единичная матрица 262
 Зависимая переменная 69, 276
 Задача Коши 418, 431, 434
 Задачи, приводящие к дифференциаль-
 ным уравнениям 428—431, 449—454
 Замкнутая область 283
 Знакопеременный ряд 390
 Знакопеременный ряд 389
 Значение функции 69, 276
 Инвариант общего уравнения линии вто-
 рого порядка 66
 Интегральная кривая 418, 431
 — сумма 177, 307, 325, 347, 358
 Интеграл с переменным верхним преде-
 лом 191
 Интегральный признак 387
 Интегрирование 161
 — некоторых иррациональных функций
 172—174
 — — трансцендентных функций 175—177
 — непосредственное 163
 — подстановкой 163, 164
 — полных дифференциалов 341, 342
 — по частям 165
 — рациональных функций 167—172
 Интегрируемая функция 178, 308, 325,
 347, 354, 358
 Интервал 16
 — сходимости степенного ряда 393
 Интерполяционная формула Лагранжа
 153
 — — Ньютона 154
 Интерполяционный многочлен 151, 152
 Интерполяция 151, 152
 Иррациональная функция 73
 Иррациональные числа 11
 Каноническое уравнение гиперболиче-
 ского параболоида 256
 — — гиперболы 56
 — — двуполостного гиперболоида 254,
 255
 — — конуса второго порядка 258
 — — однополостного гиперболоида 253

- — параболы 62
- — эллипса 53
- — эллипсоида 253
- — эллиптического параболоида 253

Кантор Г. 98

Касательная 105

— плоскость 292

Квадрант 35

Квадратная матрица 261

Колебание функции 97

Коллинеарные векторы 223

Компланарные векторы 235

Комплексная плоскость 402

Комплексно сопряженное число 403

Комплексное число 402

Композиция функций 100

Конечная производная 104

Конечный предел 26

— промежуток 16

Контур интегрирования 325

Конус второго порядка 258

Координата точки 15

Координатная плоскость 34, 223

— прямая 15

Координатный угол 35

Координаты вектора 225

Коши О. 76

Коэффициенты степенного ряда 392

— тригонометрического ряда 410

— Фурье 412

Крамер Г. 269

Кратность корня 168

Криволинейная трапеция 324

Криволинейный интеграл 324

— — второго рода 328—334

— — первого рода 325—327, 334

— сектор 200

— цилиндр 308

Критическая точка 145

Круг сходимости 408

Круговой цилиндр 243

Кусочно-гладкая кривая 325

— поверхность 353

Кусочно-непрерывная функция 91

Лагранж Ж. 130

Лаплас П. 377

Лапласово поле 378

Левая производная 107

— тройка векторов 235

Левый предел 76, 77

Лейбниц Г. 122

Линейная функция 73

Линейно зависимые функции 436

— независимые функции 436

Линия второго порядка 52

— первого порядка 47

— уровня 277

Лист Мёбиуса 357

Логарифмическая производная 119

— функция 72, 114

Логические символы 11

Локальный максимум 141, 301

— минимум 141, 301

— экстремум 141, 301

Лопиталь Г. 132

Маклорен К. 137

Максимальное значение функции 97

Малая полуось эллипса 54

Масса пластинки 321

— тела 352

Матрица 260

Мгновенная скорость 106

Метод вариацй постоянной 422, 423

— «вылки» 156, 157

— замены переменной 163, 164

— интегрирования по частям 165—167

— касательных 157, 158

— наименьших квадратов 304—306

— неопределенных коэффициентов 168, 169

— Ньютона 156, 157

— подстановки 163, 164

— Эйлера 426

Мёбиус А. 357

Минимальное значение функции 97

Минор 206

Мнимая единица 402

— ось 402

— — гиперболы 58

— часть комплексного числа 402

Мнимое число 402

Множество 10

— значений функции 69, 276

Модуль комплексного числа 404

— числа 18

Момент инерции пластинки 323, 324

— — тела 352

Монотонная последовательность 31

— функции 101

Муавр А. 405

Наклонная асимптота 137, 138

Направленная касательная 333

Направленный отрезок 14, 15, 223

Направляющая цилиндрической поверхности 242

Направляющие косинусы вектора 226

Начало координат 15, 34, 222

Начальная фаза колебаний 451

Начальные условия 418, 431, 434

Невозрастающая последовательность 30

— функция 101

Независимая переменная 69, 276

Неубывающая последовательность 30

— функция 101

Неограниченная последовательность 22

Неопределенный интеграл 160
 — —, основные методы интегрирования 163—167
 — —, — свойства 161, 162
 — —, таблица основных интегралов 162
См. также Интегрирование
 Неориентируемая поверхность 357
 Непрерывно дифференцируемая функция 327
 Непрерывность вещественных чисел 12
 — функции в интервале 90
 — — — точке 87, 88
 — — — слева, справа 87
 — — двух переменных 281, 282
 — — — вдоль кривой 326
 — — на отрезке 90, 91
 Неравенство 12
 Несобственный интеграл второго рода 211, 212
 — — первого рода 209, 210
 Нестационарное поле 368
 Неустановившееся поле 368
 Нижний предел интегрирования 178
 Нижняя грань множества 17
 — сторона поверхности 358
 — сумма Дарбу 180
 Номер члена последовательности 20
 Нормаль 49, 246
 — к поверхности 293
 Нормальная система метода наименьших квадратов 306
 Нормальный вектор плоскости 245
 Нормирующий множитель 51, 249
 Нулевой вектор 223
 Нуль 403
Ньютон И. 32

Область 283
 — интегрирования 308, 347, 354
 — определения функции 69, 276
 — сходимости степенного ряда 392
 Образующая цилиндрической поверхности 242
 Обратная матрица 273
 — функция 101, 102
 Обратные тригонометрические функции 72, 116
 Общее решение дифференциального уравнения 419, 431, 434
 Общий член последовательности 20
 — — ряда 379
 Объем криволинейного цилиндра 317
 — тела 347, 365
 — — вращения 204
 Ограниченная последовательность 22
 — снизу, сверху последовательность 21, 22
 — —, — функция 70
 — функция 70
 Ограниченное множество 17, 283

— снизу, сверху множество 17
 Однополостный гиперболоид 253
 Односвязная область 336
 Односторонняя поверхность 357
 Окрестность точки 284
 Октант 223
 о малое 85, 86, 281
 Оператор Гамильтона 376
 — Лапласа 377
 — «набла» 376
 Определенный интеграл 177, 178
 — —, геометрические и физические приложения 197—209
 — —, основные свойства 186—188
 — —, оценки 188—190
 — —, условия интегрируемости 179, 180, 183—185
 Определитель Вронского 437
 — второго порядка 238
 — системы уравнений 268
 — третьего порядка 263—268
 Ордината 35, 222
 Ориентация поверхности 357
 Ориентируемая поверхность 357
 Ортогональная система функций 420
 Основное тождество 15
 Основной прямоугольник гиперболы 58
 Особая точка 211, 418
 Остаточный член в форме Лагранжа 137, 138
 — — — — Пеано 137, 138
 — — интерполяции 155
 Оси гиперболы 58
 — координат 34, 222
 — эллипса 54
Остроградский М. В. 362
 Ось 14
 — абсцисс 34, 222
 — аппликат 222
 — ординат 34
 — параболы 63
 Открытая область 283
 Открытое множество 283
 Отношение 37
 Отображение 69
 Отрезок 16
 Отрицательное направление обхода контура 331, 357

Парабола 61, 62
 Параболический тип линии второго порядка 66—68
 Параболоид вращения 256
 Параллельный сдвиг осей координат 39
 Параметр 125
 — параболы 62
 Параметрическое задание функции 125

Параметры гиперболического параболоида 258
 — эллиптического параболоида 256
 Пеано Д. 137
 Первообразная 159
 Первый замечательный предел 79, 80
 Переменная интегрирования 161
 Переменные интегрирования 308, 347
 Период полураспада 430
 Периодическое продолжение функции 412
 Плотность источников 374
 Площадь криволинейного сектора 198
 — криволинейной трапеции 197, 199
 — плоской фигуры 198, 199, 317, 318, 344
 — поверхности 319, 320, 354
 — — вращения 205, 207
 — треугольника 36
 Побочная диагональ определителя 263
 Поверхностный интеграл 353
 — — второго рода 358—362
 — — первого рода 353—356, 361, 362
 Поворот осей координат 39, 40
 Погрешность 305
 Подмножество 10
 Подстановки Эйлера 174
 Подынтегральная функция 161, 178
 Подынтегральное выражение 161, 178
 Показательная функция 72, 115, 116
 — — комплексной переменной 409
 Поле 368
 — направлений 420
 Полное приращение 282
 Полный дифференциал 337
 Положительное направление обхода контура 331, 357
 Полуоси двуполостного гиперболоида 255
 — однополостного гиперболоида 254
 — эллипсоида 253
 Полюс 38
 Полярная ось 38
 — система координат 38
 Полярные координаты точки 38
 Полярный радиус 38
 — угол 38
 Порядок бесконечно большой 86, 87
 — — малой 85, 86
 Последовательность 20
 — вложенных отрезков 33
 Постоянная 70, 89, 112
 Потенциал 369
 Потенциальная функция 370
 Потенциальное поле 369
 Потенциальный вектор 369
 Поток вектора через поверхность 372
 Правая производная 107
 — тройка векторов 235
 Правило треугольников 264
 Правый предел 76, 77

Предел длин ломаных 201
 — интегральной суммы 307
 — последовательности 25, 26
 — — комплексных чисел 405
 — — точек 279
 — функции двух переменных 279, 280
 — — по Гейне 73
 — — — Коши 75
 — — при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 77, 78
 Предельное положение секущей 105
 Признак Даламбера 385
 — Лейбница 389
 — сравнения 381
 Приращение аргумента 88
 — функции 88
 Проекция вектора на ось 224
 Произведение вектора на число 227
 — вещественных чисел 13
 — комплексных чисел 403
 — матриц 261, 262
 — матрицы на число 261
 — последовательностей 21
 — последовательности на число 21
 Производная 104
 — высшего порядка 120, 121
 —, геометрический смысл 105, 106
 — по направлению 294, 295
 —, физический смысл 106, 107
См. также Дифференцирование
 Промежуток 16
 Промежуточная переменная 100
 Простая область 334, 362
 Простейшие элементарные функции 72
 Прямоугольная матрица 261
 — система координат в пространстве 222
 — — — на плоскости 34
 Прямоугольные координаты точки 34, 222
 Пустое множество 10

 Работа переменной силы 208, 345, 346
 Равные векторы 223
 — комплексные числа 402
 Равномерно-непрерывная функция 98
 Равносторонняя гиперболоида 59
 Радиус-вектор 259
 Радиус сходимости степенного ряда 379, 408
 Разложение вектора по базису 231
 — определителя по элементам строки (столбца) 266, 267
 — рациональной функции на элементарные дроби 168
 — элементарных функций в ряд Маклорена 396—401
 — — — по формуле Маклорена 138
 Разности 154
 Разность векторов 227

Разность вещественных чисел 13
 — комплексных чисел 403
 — последовательностей 21
 Раскрытие неопределенностей 131—135
 Расстояние между двумя точками 35
 — от точки до плоскости 247
 — — — — прямой 50, 251
 Расходящаяся последовательность 25
 Расходящийся ряд 379
 Рациональная функция 73, 89
 — — двух переменных 172
 Рациональные числа 11
 Резонанс 454
 Рекуррентная формула 167
 Решение дифференциального уравнения 418, 431, 434
 — системы уравнений 268
Ролль М. 128
 Ротор векторного поля 375
 Ряд 379
 — Маклорена 397
 — Фурье 412
 — — для функций с периодом 21 415, 416
 — — — четных и нечетных функций 413, 414

 Свободный вектор 224
 Связное множество 283
 Сегмент 16
Симпсон Т. 219
 Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными 268, 272
 — — — — — однородная 270
 Скалярная величина 223
 — функция 368
 Скалярное поле 368
 — произведение 231—234
 Скалярный квадрат 233
 Сложная функция 100
 Смешанная частная производная 296
 Смешанное произведение 239, 240
 Соленоидальное поле 374
 Сопряженная гиперболоа 58
 Спираль Архимеда 42
 Сравнение бесконечно больших 86, 87
 — — малых 85, 281
 — вещественных чисел 12
 Среднее значение 190
 Средняя скорость 106
 Статические моменты 323
 Стационарное поле 368
 Степенная функция 72, 89, 112, 119
 Степенной ряд 391
 — — с комплексными членами 407
Стокс Д. 365
 Столбец 260
 Сторона поверхности 357
 Строго монотонная последовательность 31

— — функция 101
 Строгое неравенство 12
 Строка 260
 Сумма векторов 226, 227
 — вещественных чисел 12
 — комплексных чисел 403
 — матриц 261
 — последовательностей 21
 — ряда 379
 Суммарная мощность источников 374
 Суперпозиция функций 100
 Сфера 253
 Сферические координаты 350
 Схема исследования графика функции 149, 150
 Сходящаяся последовательность 25, 279, 405
 Сходящийся ряд 379, 406

 Таблица основных интегралов 162
 — производных простейших элементарных функций 120
 Табличный интеграл 162
 — способ задания функции 71, 72
Тейлор Б. 135
 Теорема Абеля 302, 303, 407
 — Больцано — Коши вторая 93
 — — первая 92, 93
 — Вейерштрасса вторая 96, 97
 — — первая 95
 — Кантора 98, 99
 — Коши 131
 — — существования и единственности решения дифференциального уравнения 418, 431
 — Лагранжа 130
 — Лопиталя 132, 133
 — о вложенных отрезках 33, 34
 — — замене переменной в двойном интеграле 315
 — — монотонности функции 140
 — — независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования 337—339
 — — непрерывности обратной функции 102, 103
 — — — сложной функции 100, 101
 — — производной интеграла с переменным верхним пределом 191, 192
 — — — обратной функции 114, 115
 — — — сложной функции 116, 117, 288, 289
 — — равенстве смешанных производных 297, 298
 — — разложении рациональной функции на элементарные дроби 168
 — — связи между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями 24, 25
 — — — — криволинейным и двойным

- интегралами** 334, 335
- — — — — **поверхностным и криволиней-**
- ным интегралами** 365, 366
- — — — — **тройным интегралами**
- 362—364**
- — **среднем** 190, 310
- — **существовании точных граней у ог-**
- раниченного множества** 18
- — **сходимости монотонной ограничен-**
- ной последовательности** 31
- — — **несобственных интегралов** 212,
- 213**
- об общем уравнении прямой 47
- — устойчивости знака непрерывной
- функции** 92
- Ролля 128, 129
- Тейлора 135—137, 299, 300
- Ферма 127, 128
- Теоремы о бесконечно малых последова-**
- тельностих** 24
- — — — — **функциях** 82, 83
- — **векторах** 224, 225, 229—231, 234,
- 238—241**
- — **дифференцируемых функциях** 107,
- 108, 111, 112, 286—288**
- — **методах вычисления определенных**
- интегралов** 194, 196
- — **направлении выпуклости и точках**
- перегиба графика функции** 143—145
- — **непрерывных функциях** 88, 92, 93,
- 95—103**
- — **первообразных** 160, 163, 165
- — **последовательностях и рядах комп-**
- лексных чисел** 405—408
- — **пределах функций** 75—79, 280
- — **разложении функций в ряд Фурье**
- 411—413**
- — **сведении двойного интеграла к**
- повторному** 310—313
- — **свойствах решений линейных ди-**
- фференциальных уравнений** 436—440,
- 443, 444**
- — **свойстве эллипса и гиперболы** 60,
- 61**
- — **сходности степенных рядов** 392—
- 398**
- — — **числовых рядов** 381—390
- — **сходящихся последовательностях**
- 27—30**
- об абсолютных величинах 19
- — интегрируемости функций 179,
- 183—186, 308**
- — экстремумах функций 141, 142,
- 301—303**
- Тождественное преобразование** 263
- Тождество** 41
- Топ** 205
- Точка возможного экстремума** 142, 302
- **локального максимума** 140, 301
- — минимума 140, 301

- — экстремума 141, 301
- множества 10
- перегиба 144
- разбиения 177
- разрыва 91, 281
- — 1-го рода 91
- — 2-го рода 91
- числовой прямой 16
- Точная верхняя грань множества 17
- — — функции 94
- нижняя грань множества 17
- — — функции 94
- Трансцендентная функция 73
- Тригонометрическая форма комплексно-го числа 404
- Тригонометрические функции 72, 89, 90, 113, 114
- — комплексной переменной 409
- Тригонометрический ряд 410
- Тройной интеграл 347
- —, вычисление путем замены переменных 349, 350
- —, — — сведения к повторному 347, 348
- —, приложения 352, 353
- Трубчатое поле 374
- Убывающая последовательность 30
- функция 101
- Угловой коэффициент 44
- Угол между плоскостями 245
- — прямой и плоскостью 252
- — прямыми 46, 251
- наклона прямой к оси Ox 43
- Узлы интерполяции 152
- Упорядоченная пара чисел 35, 69
- тройка векторов 235
- — чисел 222, 275
- Уравнение графика 70
- Лапласа 378
- линии 41
- мнимого эллипса 67
- пары мнимых параллельных прямых 68
- — — пересекающихся прямых 67
- — параллельных прямых 68
- — пересекающихся прямых 67
- — совпавших прямых 68
- плоскости нормальное 246
- — общее 244
- поверхности 241
- прямой «в отрезках» 48
- — неполное 48
- — нормальное 50
- — общее 47
- —, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом 45
- —, — — две данные точки 45
- — с угловым коэффициентом 44
- с двумя переменными 41

См. также Каноническое уравнение
 Уравнения линии 242
 — прямой канонические 249
 — — общие 248
 — центра линии второго порядка 66
 Условие параллельности плоскостей 245, 246
 — — прямой и плоскости 252
 — — прямых 46, 47, 251
 — перпендикулярности плоскостей 246
 — — прямой и плоскости 252
 — — прямых 47, 251
 Условия Коши 419
 Условно сходящийся ряд 391
 Установившееся поле 368

Ферма П. 127

Фокальные радиусы точки 52, 55
 Фокус параболы 62
 Фокусы гиперболы 55
 — эллипса 52
 Формула бинома Ньютона 139
 — Грина 334
 — замены переменной в неопределенном интеграле 163
 — — — — определенном интеграле 194, 195
 — интегрирования по частям в неопределенном интеграле 165
 — — — — определенном интеграле 196
 — конечных приращений 130, 131
 — — — обобщенная 131
 — Коши 131
 — Лагранжа 130, 131
 — — для функции двух переменных 301
 — Лейбница 122
 — Маклорена 137
 — Муавра 405
 — Ньютона — Лейбница 193
 — Остроградского 263
 — парабол 219
 — Симпсона 219
 — среднего значения 190
 — Стокса 367, 375
 — Тейлора 135, 137, 138
 — — для функций двух переменных 299, 300
 — трапеций 216
 Формулы Крамера 269
 — обратного преобразования 315
 — преобразования координат 315
 — Эйлера 409
 Функциональный определитель 315
 Функция 69
 — двух переменных 275, 276
 — Дирихле 71
 — n переменных 277

— $y = \operatorname{sgn} x$ 71
 См. также соотв. названия
 Фурье Ж. 412

Характеристическое уравнение 443

Целая рациональная функция 72, 73
 — часть числа 23
 Центр гиперболы 58
 — линии второго порядка 66
 — масса пластинки 322, 323
 — — тела 352, 353
 — эллипса 54
 Циклоида 203
 Цилиндрическая поверхность 242
 Цилиндрические координаты 350
 Циркуляция векторного поля 375

Частичная сумма ряда 379
 Частная производная 284
 — — высшего порядка 295, 296
 Частное вещественных чисел 13
 — комплексных чисел 403
 — последовательностей 21
 — приращение 284
 — решение дифференциального уравнения 419, 432, 434
 Частота колебаний 451
 Четверть 35
 Число e 33, 140
 Числовая последовательность 20
 — прямая 16
 Числовой ряд 379
 — — с комплексными членами 406
 Чисто мнимое число 402
 Член последовательности 20
 — ряда 379

Эйлер Л. 174

Эквивалентные бесконечно малые 85
 Эксцентриситет гиперболы 59
 — эллипса 54, 55
 Элемент матрицы 260
 — множества 10
 — объема 347
 — определителя 263
 — площади 308
 — последовательности 20
 Элементарные множители 167
 — функции 72
 Эллипс 52
 Эллипсоид 252
 Эллиптический параболоид 255
 — тип линии второго порядка 66, 67
 — цилиндр 243
 Эрмита интерполяция 154, 155

Якоби К. 315
 Якобиан 315

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X
 $x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X
 $X \subset Y$ — множество X есть подмножество множества Y
 $X \not\subset Y$ — множество X не является подмножеством множества Y
 $\emptyset$ — пустое множество
 $\{x \mid P(x)\}$ — множество чисел x , обладающих свойством $P(x)$
 $x = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ — x есть максимальное из чисел $x_1, \dots, x_n$
 $x = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ — x есть минимальное из чисел $x_1, \dots, x_n$
 $\forall x$ — для любого x
 $\exists x$ — существует такое x
 $(x; y)$ — координаты точки на плоскости, упорядоченная пара чисел
 $(x; y; z)$ — координаты точки в пространстве, упорядоченная тройка чисел
 $\overline{AB}$ — направленный отрезок
 $\overrightarrow{AB}$ — вектор
 $|\overline{AB}|, |\overrightarrow{a}|$ — длина вектора
 $\overline{AB} = \{X; Y; Z\}$ — вектор $\overline{AB}$ имеет координаты X, Y, Z
 $\text{пр}_u \overline{AB}$ — проекция вектора $\overline{AB}$ на ось u
 $\overline{a} \cdot \overline{b}$ — скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$
 $\overline{a} \times \overline{b}$ — векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$
 $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$ — смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$
 $[a, b]$ — отрезок, сегмент
 $(a, b), (a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, +\infty)$ — интервалы
 $[a, b), (a, b], [a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty)$ — полуинтервалы
 $\mathbb{R}$ — числовая прямая, множество всех вещественных чисел
 $(a - \delta, a + \delta)$ — δ -окрестность точки a
 $\sup X$ — точная верхняя грань множества X
 $\inf X$ — точная нижняя грань множества X
 $|x|$ — абсолютная величина (модуль) числа x
 $\text{sgn } x$ — функция знак x
 $[x]$ — целая часть числа x
 $\{x_n\}$ — числовая последовательность
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд
 $y = f(x), f: x \mapsto y$ — функция, отображение
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ справа, правый предел
 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ слева, левый предел

$\alpha(x) \sim \beta(x)$	— бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны
$\alpha(x) = o(\beta(x))$	— бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$
$\sup_x f(x)$	— точная верхняя грань функции $f(x)$ на множестве X
$\inf_x f(x)$	— точная нижняя грань функции $f(x)$ на множестве X
$f'(x), y'(x)$	— производная функции $y = f(x)$ в точке x
$f'_+(x)$	— правая производная функции $y = f(x)$ в точке x
$f'_-(x)$	— левая производная функции $y = f(x)$ в точке x
dy	— дифференциал функции $y = f(x)$
$y'', y''', \dots, y^{(n)}$	— производные второго, третьего, ..., n -го порядка
$d^2y, d^3y, \dots, d^ny$	— дифференциалы второго, третьего, ..., n -го порядка
$\Delta y, \Delta^2y, \dots, \Delta^ny$	— разности первого, второго, ..., n -го порядка
$z = f(x, y), z = f(M)$	— функция двух переменных
$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y), \lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$	— предел функции $z = f(x, y) = f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$
$z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$	— частная производная функции $z = f(x, y)$ по x
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, f''_{xy}(x, y)$	— смешанная частная производная второго порядка функции $z = f(x, y)$
$\int_a^b f(x) dx$	— неопределенный интеграл от функции $f(x)$
$\int_a^b f(x) dx$	— определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$
$\iint_G f(x, y) ds, \iint_G f(x, y) dx dy$	— двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G
$\int_{AB} f(M) dl, \int_{AB} f(x, y) dl$	— криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y) = f(M)$ по кривой AB
$\int_{AB} P(x, y) dx$	— криволинейный интеграл второго рода от функции $P(x, y)$ по кривой AB
$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$	— криволинейный интеграл по замкнутому контуру L
$\iiint_V f(x, y, z) dv, \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$	— тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V
$\iint_S f(M) dS, \iint_S f(x, y, z) dS$	— поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z) = f(M)$ по поверхности S
$\iint_S R(M) dx dy, \iint_S R(x, y, z) dx dy$	— поверхностный интеграл второго рода от функции $R(x, y, z) = R(M)$ по поверхности S
$\text{grad } z$	— градиент функции $z = f(x, y)$
$\text{div } \underline{a}$	— дивергенция векторного поля $\underline{a}(M)$
$\text{rot } \underline{a}$	— ротор векторного поля $\underline{a}(M)$
∇	— оператор Гамильтона
Δ	— оператор Лапласа

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Аналитическая геометрия на плоскости

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ — координаты точки, делящей отрезок с концами

$M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в отношении $\lambda = |M_1 M| : |M M_2|$

$Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$)

$y = kx + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k (b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy)

$y - y_1 = k(x - x_1)$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ — уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$

и $M_2(x_2; y_2)$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках (a, b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy)

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ — формула вычисления одного из углов между прямыми

$y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипса (a, b — полуоси)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — каноническое уравнение гиперболы

$y^2 = 2px, y^2 = -2px$ — каноническое уравнение параболы с осью симметрии Ox ($p > 0$ — параметр)

$X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$ — выражение координат вектора $\overline{AB}$ через координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$

$|\overline{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ — выражение длины вектора $\overline{a} = \{X; Y; Z\}$ через его координаты

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ — расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| |\overline{b}| \cos \varphi$ — определение скалярного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (φ — угол между векторами)

$\overline{a} \cdot \overline{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$ — выражение скалярного произведения векторов $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ через их координаты

$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$ — выражение угла между векторами

$Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости (A, B, C — любые вещественные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ — канонические уравнения прямой с направляющим вектором $\overline{a} = \{l; m; n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ — параметрические уравнения прямой

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — каноническое уравнение эллипсоида (a, b, c — полуоси)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — каноническое уравнение двуполостного гиперболоида

$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ — каноническое уравнение эллиптического параболоида ($p > 0$, $q > 0$ — параметры)

$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — каноническое уравнение конуса второго порядка

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ — первый замечательный предел}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ — второй замечательный предел}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ — определение производной функции } y = f(x)$$

в точке x_0

$$dy = f'(x_0) dx \text{ — дифференциал функции } f(x) \text{ в точке } x_0$$

$$(C)' = 0, (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \text{ — производные простейших элементарных функций}$$

$$y'(t_0) = f'(x_0) \quad \varphi'(t_0) \text{ — правило дифференцирования сложной функции } y = f[\varphi(t)] \text{ в точке } t_0; \text{ здесь } x_0 = \varphi(t_0)$$

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ — правило дифференцирования обратной функции } x = \varphi(y) \text{ в точке } y_0 = f(x_0)$$

$$y^{(n)} = u^{(n)} v + nu^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2} u^{(n-2)} v'' + \dots + uv^{(n)} \text{ — формула Лейбница}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ — формула Лагранжа; } c \in (a, b)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ — формула Коши; } c \in (a, b)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \text{ — формула Тейлора; } \xi \in (a, x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x) \text{ — формула Маклорена}$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C, \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \text{ — табличные интегралы}$$

$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(\alpha)}^{x=\varphi(\beta)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ — формула замены переменной в неопределенном интеграле

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ — формула замены переменной в определенном интеграле; $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$ — формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ — формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$ — формула среднего значения; $c \in [a, b]$

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ — формула Ньютона — Лейбница

$S = \int_a^b f(x) dx$ — площадь криволинейной трапеции $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$

$S = \int_a^\beta \psi(t) \varphi'(t) dt$ — площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически: $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$

$$s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \text{ — площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, за-}$$

данной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \text{ — длина дуги кривой, заданной уравнением } y = f(x), a \leq x \leq b$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \text{ — длина дуги кривой, заданной параметрически:}$$

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi \text{ — длина дуги кривой, заданной в полярных координатах: } \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$v = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ — объем тела вращения вокруг оси } Ox \text{ криволинейной трапеции}$$

$$0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \text{ — площадь поверхности вращения вокруг оси } Ox \text{ криволинейной трапеции } 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$$

Дифференцирование и интегрирование функций нескольких переменных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \text{ — определение частной производной функции } z = f(x, y) \text{ по пере-}$$

менной x

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \text{ — правило дифференцирования сложной функции}$$

$$z = f[x(t), y(t)]$$

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy \text{ — дифференциал функции } z = f(x, y) \text{ в точке } (x_0; y_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta \text{ — формула для производной функции } z = f(x, y) \text{ по направ-}$$

лению вектора $l = \{\cos \alpha; \cos \beta\}$

$$\Delta f = df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x, y)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ —}$$

формула Тейлора для функции $z = f(x, y)$

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy — \text{формула вычисления двойного интеграла по}$$

области $G = \{(x, y) | a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi — \text{формула вычисления двойного}$$

интеграла в полярных координатах

$$s = \iint_G dx dy — \text{площадь области } G \text{ на плоскости } xOy$$

$$v = \iiint_G f(x, y) dx dy — \text{объем криволинейного цилиндра } 0 \leq z \leq f(x, y); (x, y) \in G$$

$$s = \iint_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy — \text{площадь поверхности } S, \text{ заданной урав-$$

нением $z = f(x, y); (x, y) \in G$

$$\int_{AB} f(x, y) dt = \int_a^\beta f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt — \text{формула вычисления криволи-}$$

нейного интеграла первого рода по кривой $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)] y'(x)\} dx — \text{формула вычисления криво-}$$

линейного интеграла второго рода вдоль кривой $y = y(x), a \leq x \leq b$

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy — \text{формула Грина } (L — \text{граница области } G)$$

$$s = \oint_L x dy, s = - \oint_L y dx, s = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx — \text{формулы вычисления площади области}$$

G , ограниченной кривой L

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz — \text{формула вычисления трой-}$$

ного интеграла по области $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in G, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz — \text{формула вычисления}$$

тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta —$$

формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах

$$v = \iiint_V dx dy dz — \text{объем тела } V \text{ в пространстве } Oxyz$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy — \text{формула вычи-}$$

сления поверхностного интеграла первого рода по поверхности S , заданной уравнением $z = f(x, y); (x, y) \in G$

$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_G R[x, y, f(x, y)] dx dy$ — формула вычисления поверхностного интеграла второго рода по поверхности S , заданной уравнением $z = f(x, y)$; $(x, y) \in G$

$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$ — формула Остроградского

$$\oint P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right] dS$$
 — формула Стокса

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$
 — определение градиента скалярного поля $F(x, y, z)$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$
 — определение дивергенции векторного поля

$$\vec{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$
 — определение ротора векторного поля

$$\vec{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$
 — определение оператора Гамильтона

Ряды

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
 — степенной ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$
 — ряд Маклорена

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
 — ряд Фурье, где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$
 — коэффициенты Фурье

Дифференциальные уравнения

$$F(x, y, y') = 0$$
 — уравнение первого порядка

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$
 — уравнение с разделяющимися переменными

$$y' + p(x)y = f(x)$$
 — линейное уравнение первого порядка

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ — уравнение в полных дифференциалах

$F(x, y, y', y'') = 0$ — уравнение второго порядка

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ — линейное уравнение второго порядка

$y'' + py' + qy = f(x)$ — линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$F(x, y, y', y^{(n)}) = 0$ — уравнение n -го порядка

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
<i>Часть первая. Математический анализ функций одной переменной</i>	10
<i>Глава 1. Вещественные числа</i>	10
§ 1. Множества. Обозначения. Логические символы	10
§ 2. Вещественные числа и их основные свойства	11
§ 3. Геометрическое изображение вещественных чисел	14
1. Изображение вещественных чисел точками на координатной прямой (14). 2. Некоторые наиболее употребительные числовые множества (16)	
§ 4. Грани числовых множеств	17
§ 5. Абсолютная величина числа	18
<i>Глава 2. Предел последовательности</i>	20
§ 1. Числовые последовательности	20
1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними (20). 2. Ограниченные и неограниченные последовательности (21). 3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (22). 4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (24)	
§ 2. Сходящиеся последовательности	25
1. Понятие сходящейся последовательности (25). 2. Основные свойства сходящихся последовательностей (26). 3. Предельный переход в неравенствах (29)	
§ 3. Монотонные последовательности	30
1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей (30). 2. Число e (32)	
§ 4. Теорема о вложенных отрезках	33
<i>Глава 3. Аналитическая геометрия на плоскости</i>	34
§ 1. Прямоугольная система координат	34
§ 2. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости	35
1. Расстояние между двумя точками (35). 2. Площадь треугольника (36). 3. Деление отрезка в данном отношении (36)	
§ 3. Полярные координаты	38
§ 4. Преобразование прямоугольных координат	39
1. Параллельный сдвиг осей (39). 2. Поворот осей координат (40)	
§ 5. Уравнение линии на плоскости	41
§ 6. Линии первого порядка	43
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (43). 2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом (45). 3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (45). 4. Угол между двумя прямыми (46). 5. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (46). 6. Общее уравнение прямой (47). 7. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках» (48). 8. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой (49)	

§ 7. Линии второго порядка	52
1. Эллипс (52). 2. Гипербола (55). 3. Директрисы эллипса и гиперболы (59). 4. Парабола (62)	
§ 8. Общее уравнение линии второго порядка	64
1. Приведение общего уравнения линии второго порядка к простейшему виду (64). 2. Инвариантность выражения $AC - B^2$. Классификация линий второго порядка (66)	
Глава 4. Функции одной переменной	69
§ 1. Понятие функции	69
1. Определение функций (69). 2. Способы задания функций (70). 3. Классификация функций (72)	
§ 2. Предел функции	73
1. Предел функций при $x \rightarrow x_0$ (73). 2. Предел функции при $x \rightarrow x_0 -$ и при $x \rightarrow x_0 +$ (76). 3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$ (77)	
§ 3. Теоремы о пределах функций	78
§ 4. Два замечательных предела	79
1. Первый замечательный предел (79). 2. Второй замечательный предел (81)	
§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	82
1. Бесконечно малые функции (82). 2. Бесконечно большие функции (83)	
§ 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций	84
§ 7. Понятие непрерывности функций	87
1. Определение непрерывности функций (87). 2. Арифметические действия над непрерывными функциями (88)	
§ 8. Непрерывность некоторых элементарных функций	88
1. Непрерывность рациональных функций (89). 2. Непрерывность тригонометрических функций (89). 3. Непрерывность функции $f(x) = x $ (90)	
§ 9. Классификация точек разрыва функции	91
1. Определение и классификация точек разрыва функции (91). 2. Кусочно-непрерывные функции (91)	
§ 10. Основные свойства непрерывных функций	92
1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (92). 2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение (92). 3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке (94). 4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней (96). 5. Понятие равномерной непрерывности функции (97). 6. Теорема о равномерной непрерывности функции (98)	
§ 11. Понятие сложной функции	100
§ 12. Понятие обратной функции	101
1. Определение обратной функции (101). 2. Теорема о непрерывности обратной функции (102)	
Глава 5. Дифференцирование	104
§ 1. Понятие производной	104
1. Определение производной (104). 2. Геометрический смысл производной (105). 3. Физический смысл производной (106). 4. Правая и левая производные (107)	
§ 2. Понятие дифференцируемости функции	107
1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке (107). 2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности (108)	
§ 3. Понятие дифференциала	109
1. Определение и геометрический смысл дифференциала (109). 2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала (110)	

§ 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного	111
§ 5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции	112
1. Производная постоянной функции (112). 2. Производная степенной функции (112). 3. Производные тригонометрических функций (113). 4. Производная логарифмической функции (114)	
§ 6. Теорема о производной обратной функции	114
§ 7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций	115
1. Производная показательной функции (115). 2. Производные обратных тригонометрических функций (116)	
§ 8. Правило дифференцирования сложной функции	116
§ 9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций	118
1. Понятие логарифмической производной функции (118). 2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем (119). 3. Таблица производных простейших элементарных функций (120)	
§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков	120
1. Понятие производной n -го порядка (120). 2. Формулы для n -х производных некоторых функций (121). 3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций (122). 4. Дифференциалы высших порядков (123)	
§ 11. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование	125
1. Параметрическое задание функции (125). 2. Дифференцирование функции, заданной параметрически (126)	

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

§ 1. Основные теоремы дифференциального исчисления	127
§ 2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя	131
1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (131). 2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (133). 3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие (134)	
§ 3. Формула Тейлора	135
1. Формула Тейлора (135). 2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена (137). 3. Формула Маклорена (137). 4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (138). 5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов (139). 6. Вычисление числа e (139)	
§ 4. Исследование поведения функций и построение графиков	140
1. Признак монотонности функции (140). 2. Отыскание точек локального экстремума функции (140). 3. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции (143). 4. Асимптоты графика функции (146). 5. Схема исследования графика функции (149)	
§ 5. Интерполяция функций	151
1. Постановка задачи (151). 2. Интерполяционная формула Лагранжа (152). 3. Интерполяционная формула Ньютона (153). 4. Остаточный член интерполяции (155)	
§ 6. Методы приближенного вычисления корней уравнений	156
1. Метод «вилки» (156). 2. Метод касательных (157)	

Глава 7. Неопределенный интеграл	159
§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл	159
1. Понятие первообразной функции (159). 2. Неопределенный интеграл (160)	
§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла	161
§ 3. Таблица основных интегралов	162
§ 4. Основные методы интегрирования	163
1. Непосредственное интегрирование (163). 2. Метод подстановки (163). 3. Метод интегрирования по частям (165)	
§ 5. Интегрирование рациональных функций	167
§ 6. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций	172
1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (172). 2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (173). 3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (175). 4. Интеграл вида $\int R(e^x)dx$ (176)	
Глава 8. Определенный интеграл	177
§ 1. Определение определенного интеграла	177
§ 2. Условия существования определенного интеграла	179
1. Ограниченность интегрируемой функции (179). 2. Суммы Дарбу (180). 3. Свойства сумм Дарбу (181). 4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости (183)	
§ 3. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций	184
§ 4. Основные свойства определенного интеграла	186
§ 5. Оценки интегралов. Формула среднего значения	188
1. Оценки интегралов (188). 2. Формула среднего значения (190)	
§ 6. Интеграл с переменным верхним пределом	191
§ 7. Формула Ньютона—Лейбница	192
§ 8. Замена переменной в определенном интеграле	194
§ 9. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле	196
§ 10. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла	197
1. Площадь криволинейной трапеции (197). 2. Площадь криволинейного сектора (200). 3. Длина дуги кривой (201). 4. Объем тела вращения (204). 5. Площадь поверхности вращения (205). 6. Работа переменной силы (207)	
§ 11. Несобственные интегралы	209
1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (209). 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (211). 3. Признак сходимости несобственных интегралов (212). 4. Пример использования несобственного интеграла (214)	
§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов	215
1. Формула трапеций (215). 2. Формула парабол (217)	
Часть вторая. Математический анализ функций нескольких переменных	222
Глава 9. Аналитическая геометрия в пространстве	222
§ 1. Прямоугольная система координат в пространстве	222
§ 2. Понятие вектора	223
1. Скалярные и векторные величины (223). 2. Определение вектора (223). 3. Проекция вектора на ось (224). 4. Проекции вектора на оси координат (225). 5. Направляющие косинусы вектора (225)	
§ 3. Линейные операции над векторами и их основные свойства	226
1. Сложение двух векторов (226). 2. Произведение вектора на число (227). 3. Основные свойства линейных операций (227)	
§ 4. Теоремы о проекциях векторов	229
§ 5. Разложение вектора по базису	231

§ 6. Скалярное произведение векторов	231
1. Определение и основные свойства скалярного произведения (231).	
2. Выражение скалярного произведения через координаты векторов (234)	
§ 7. Векторное произведение	235
1. Определение векторного произведения (235). 2. Основные свойства векторного произведения (236). 3. Выражение векторного произведения через координаты векторов (238)	
§ 8. Смешанное произведение трех векторов	239
1. Определение и геометрический смысл смешанного произведения (239). 2. Выражение смешанного произведения через координаты векторов (240)	
§ 9. Уравнения поверхности и линии	241
§ 10. Уравнение цилиндрической поверхности	242
§ 11. Уравнения плоскости	244
1. Общее уравнение плоскости (244). 2. Угол между двумя плоскостями (245). 3. Условие параллельности плоскостей (245). 4. Условие перпендикулярности плоскостей (246). 5. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости (246)	
§ 12. Уравнение прямой	248
1. Канонические уравнения прямой (248). 2. Параметрические уравнения прямой (250). 3. Угол между прямыми (250). 4. Условия параллельности прямых (251). 5. Условия перпендикулярности прямых (251). 6. Расстояние от точки до прямой (251).	
§ 13. Взаимное расположение прямой и плоскости	251
1. Условия параллельности и перпендикулярности (251). 2. Угол между прямой и плоскостью (252)	
§ 14. Поверхности второго порядка	252
1. Эллипсоид (252). 2. Однополостный гиперболоид (253). 3. Двуполостный гиперболоид (254). 4. Эллиптический параболоид (255). 5. Гиперболический параболоид (256). 6. Конус второго порядка (258)	
Глава 10. Элементы высшей алгебры	259
§ 1. Матрицы	259
1. Определение матрицы (259). Свойства матриц (261)	
§ 2. Определители	263
1. Определение определителя (263). 2. Свойства определителей (264)	
§ 3. Исследование системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными	268
§ 4. Матричная запись системы линейных уравнений. Понятие обратной матрицы	272
Глава 11. Предел и непрерывность функций нескольких переменных	275
§ 1. Понятие функции нескольких переменных	275
1. Вводные замечания (275). 2. Определение функции двух и более переменных (275)	
§ 2. Геометрическое изображение функции двух переменных	277
§ 3. Предел функции двух переменных	278
§ 4. Непрерывность функции двух переменных	281
1. Определение непрерывности функции двух переменных (281). 2. Основные свойства непрерывных функций двух переменных (282)	
Глава 12. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных	284
§ 1. Частные производные	284
§ 2. Понятие дифференцируемости функции	285
	477

1. Определение дифференцируемости (285). 2. Необходимые условия дифференцируемости (286). 3. Достаточные условия дифференцируемости (287)	
§ 3. Производные сложных функций	288
§ 4. Дифференциал функции	291
1. Определение дифференциала (291). 2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала (292)	
§ 5. Производная по направлению. Градиент	293
§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков	296
1. Частные производные высших порядков (296). 2. Дифференциалы высших порядков (298)	
§ 7. Формула Тейлора для функции двух переменных	299
§ 8. Экстремумы функции двух переменных	301
1. Определение экстремума (301). 2. Необходимые условия экстремума (301). 3. Достаточные условия экстремума (302)	
§ 9. Метод наименьших квадратов	304
Глава 13. Интегрирование	307
§ 1. Двойные интегралы	307
1. Определение и условия существования двойного интеграла (307). 2. Геометрический смысл двойного интеграла (308). 3. Свойства двойного интеграла (309).	
§ 2. Сведение двойного интеграла к повторному	310
1. Случай прямоугольной области (310). 2. Случай криволинейной области (312)	
§ 3. Замена переменных в двойном интеграле	314
§ 4. Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов	317
1. Вычисление объема (317). 2. Вычисление площади (317). 3. Вычисление площади поверхности (319). 4. Вычисление массы пластинки (321). 5. Вычисление координат центра масс пластинки (322). 6. Вычисление момента инерции пластинки (323)	
§ 5. Криволинейные интегралы	324
1. Определение криволинейного интеграла первого рода (325). 2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода (327). 3. Определение криволинейного интеграла второго рода (328). 4. Вычисление криволинейных интегралов второго рода (332). 5. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода (333)	
§ 6. Формула Грина	334
§ 7. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	336
§ 8. Интегрирование полных дифференциалов	340
§ 9. Некоторые приложения криволинейных интегралов второго рода	341
1. Вычисление площади с помощью формулы Грина (344). 2. Работа силы (345)	
§ 10. Тройные интегралы	346
1. Определение тройного интеграла (347). 2. Вычисление тройных интегралов (347). 3. Замена переменных в тройном интеграле (349). 4. Некоторые приложения тройных интегралов (352)	
§ 11. Поверхностные интегралы	353
1. Определение поверхностного интеграла первого рода (353). 2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода (355). 3. Определение поверхностного интеграла второго рода (356). 4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода (359). 5. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода (361)	
§ 12. Формула Остроградского	362
§ 13. Формула Стокса	365

§ 14. Скалярное и векторное поля	368
1. Скалярное поле (368). 2. Векторное поле (369). 3. Потенциальное поле (369). 4. Задача о потоке векторного поля (371). 5. Дивергенция (372). 6. Циркуляция. Ротор (374). 7. Оператор Гамильтона (376)	
<i>Часть третья. Ряды, дифференциальные уравнения</i>	379
<i>Глава 14. Ряды</i>	379
§ 1. Понятие числового ряда	379
1. Основные определения (379). 2. Свойства сходящихся рядов (381)	
3. Необходимое условие сходимости ряда (382)	
§ 2. Ряды с неотрицательными членами	383
§ 3. Знакопередающие ряды	389
§ 4. Абсолютная и условная сходимость рядов	390
§ 5. Степенные ряды	391
1. Определение и общие замечания (391). 2. Интервал сходимости степенного ряда (392). 3. Свойства степенных рядов (395). 4. Разложение функций в степенные ряды (396)	
§ 6. Комплексные ряды	402
1. Краткие сведения о комплексных числах (402). 2. Предел последовательности комплексных чисел (405). 3. Числовые ряды с комплексными членами (406). 4. Степенные ряды с комплексными членами (407). 5. Формулы Эйлера (408)	
§ 7. Ряды Фурье	410
1. Тригонометрический ряд и его основные свойства (410). 2. Ряд Фурье (411). 3. Сходимость ряда Фурье (412). 4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (413). 5. Ряд Фурье с периодом $2l$ (415)	
<i>Глава 15. Обыкновенные дифференциальные уравнения</i>	416
§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	417
1. Определение дифференциального уравнения первого порядка (417). 2. Решение уравнения. Задача Коши (418). 3. Общее и частное решения уравнения (418). 4. Геометрический смысл уравнения (420). 5. Уравнения с разделяющимися переменными (421). 6. Линейные уравнения (422). 7. Уравнения в полных дифференциалах (423). 8. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера (425). 9. Некоторые применения дифференциальных уравнений первого порядка (428)	
§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка	431
1. Основные понятия (431). 2. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка (432). 3. Дифференциальные уравнения высших порядков (434)	
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	435
1. Основные понятия (435). 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (436). 3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка (440)	
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	443
1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (443). 2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (445)	
§ 5. Применение линейных дифференциальных уравнений к изучению колебательных явлений	449
Предметный указатель	455
Указатель основных обозначений	463
Основные формулы	465
	479

Учебное издание

Шляхчев Виктор Семенович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор *Яковлева Ж. И.* Художественный редактор *Иванова Ю. Э.* Технический редактор *Овчинникова Л. А.* Оператор *Грынъ А. Ю.*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ - 188.

Подп. в печать 06.07.98. Формат 60х88/16. Бум. газетн. Гарнитура Литературная.

Печать офсетная. Объем 29,40 усл. печ. л., 29,40 усл. кр.-отт. 27,66 уч.-изд. л.

Тираж 10 000 экз. Заказ № 140

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Набрано на персональном компьютере издательства.

Отпечатано в ОАО «Оригинал», 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.